

Devoir Surveillé N°1 de Mathématiques du Premier Semestre

Durée : 4h

Exercice 1 (7 pts) :

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{-x + 2}$ (0,75) ; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$ (1) ; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 + 6x - 7$ (0,75) ;
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 1} - 2x$ (1) ; e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x + 3}{x^2 + x - 6}$ (1) ; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ (0,75).

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(a) Déterminer le domaine de définition de f . (0,75)

(b) Étudier la continuité de f en 1. (1)

Exercice 2 (5 pts) :

1. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{x - 3}$ et $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x^2 - 4x + 4}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(a) Montrer que le point $I(3; 7)$ est centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$. (1,5 pt)

(b) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie à $(\mathcal{C}_g)$. (1 pt)

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 4x - 1$ et $(\mathcal{C}_h)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(a) Vérifier que $h(x) = (x + 2)^2 - 5$. (0,5 pt)

(b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_k)$ de la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

(c) En déduire $(\mathcal{C}_h)$ à partir de $(\mathcal{C}_k)$. (1,25 pt)

Exercice 3 (8 pts) :

On donne un triangle ABC tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Soit f l'application du plan P dans $\mathbb{R}$ qui au point M du plan associe le réel $f(M) = (\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) \cdot \vec{BC}$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure. (0,5 pt)

2. Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$; $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 9$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 16$. (0,5 pt) $\times 3$

3. Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$. (0,5 pt) $\times 3$

4. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -2)$ et $(C, 3)$.

(a) En utilisant G , déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 6$. (1 pt)

(b) Calculer GA^2 , GB^2 et GC^2 . (0,5 pt) $\times 3$

5. Soit h l'application du plan P dans $\mathbb{R}$ définie par $h(M) = MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$.

(a) Démontrer que pour tout point M du plan $h(M) = 2MG^2 + h(G)$. (1 pt)

(b) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = -42$. (1 pt)