

Exercices sur la Trigonométrie
Série : 11^{ème} Sciences.

Exercice 1.

Déterminer l'angle α en radians, dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \text{e. } \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} & \text{f. } \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} & \text{g. } \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} & . \end{array}$$

Exercice 2.

Calculer $\sin x$ et $\cos x$ sachant que l'on a : $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 3.

Calculer, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :

1. $\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$;
2. $\sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$;
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.

Exercice 4.

1. En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
2. En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, Calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

Exercice 5.

x étant un nombre réel, démontrer les égalités suivantes :

1. $2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 1 - (\sin x - \cos x)^2$;
2. $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \sin x \cos x$;
3. $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 2$;
4. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

Exercice 6.

En écrivant $3x = 2x + x$, démontrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

- a. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$;
- b. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

Exercice 7.

Soit P la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

- a. i. Calculer $P(1)$ puis factoriser $P(x)$ en un produit de binômes du premier degré.
ii. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- b. On considère l'équation

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - 1 = 0$$

Résoudre cette équation puis placer sur le cercle trigonométrique les points- images des solutions.

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- a. $\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
- b. $\cos\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos 3x = 0$;
- c. $4\sin^2 2x - 1 = 0$;
- d. $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$;
- e. $\cos x - \sin x = 1$;
- f. $\cos x + 3\sin x = \frac{1}{2}$.

On placera les points-images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 9.

- a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos \frac{x}{2} = \sin 2x$.
- b. Résoudre dans $[0 ; \pi] \times [0 ; \pi]$ le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(x+y) &= \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Exercice 10.

- 1. En remarquant que $\sin 5x = \sin(4x + x)$, démontrer que :

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$$

- 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sin 5x = 0$.
Vérifier que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.
- 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$$

- 4. Dédire des questions précédentes les valeurs de $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 11.

On suppose que, pour tout réel α , $\cos(5\alpha) = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$.

- 1. Vérifier que, pour tout réel x , $16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$.
- 2. On pose $\alpha = \frac{\pi}{5}$. Montrer que $x = \cos \alpha$ est une solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
Montrer ensuite que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
- 3. En déduire : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.