Lycée Yana Maïga de Gao

Chargé du cours

: Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ

(LYMG)

abdouldem25@gmail.com

Exercices d'entrainement		
Prof : Abdoulaye **D**rissa **D**embélé **(ADD)**	Classe : **11ème S**	2017 - 2018

Fonctions Polynômes - Equations – inéquations - Systèmes

Exercice1 : (Révision de la 10ème)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ \dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2x+1}{x+1}$; $b)\dfrac{6x^2+x+2}{2x+3}=\dfrac{3x^2-x-2}{x-3}$; $c)\ \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{6}{5}$;

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ x^4-8x^2-9=0$; $b)\ x^4-8x^2+15=0$; $c)\ (x+5)^4-6(x+5)^2-7=0$;

$d)\ (2x^2+1)^4-8(2x^2+5)^2+15=0$; $e)\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{7}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$; $f)\ x^2+2+\dfrac{8}{x^2+2}=6$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)\ -9x^2+6x-1\geq 0$; $b)\ x^2+x\geq x+1$; $c)\ 2-x>4-x^2$; $d)\ 7x<2x^2+6$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)\ x(x+1)\geq -\dfrac{9}{2}$; $b)\ x+1\geq -\dfrac{9}{2x}$; $c)\ \dfrac{3x-1}{x^2-1}\geq\dfrac{2}{x+1}$; $d)\ \dfrac{4x-1}{x-1}\leq\dfrac{2x+3}{x+1}$;

$e)\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-4}\leq\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+4}$; $f)\ \dfrac{x-2}{x-1}\leq\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}\leq\dfrac{x-1}{x-2}$.

5. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)\ |3x-1|=|x+5|$; $b)\ |2x-5|=x+3$; $c)\ |4x^2-x-9|=|2x^2-5x-3|$

$d)\ |x^2+x-3|\geq|2x-1|$; $e)\ |2x^2-x+1|\geq|5x^2-3x-22|$

6. Amadou dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont il dispose. Dans un second magasin il dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à 500 F, il lui reste 400 F. De quelle somme disposait-il au départ ?

7. « l'âne et le cheval »

Un âne et un cheval chargés de sacs également pesants font chemin ensemble. L'âne se plaignant de sa charge, le cheval lui : « De quoi te plains-tu ! Si je prenais un de tes sacs, je serais chargé deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi

[Tapez une citation prise dans le document, ou la synthèse d'un passage intéressant. Vous pouvez placer la zone de texte n'importe où dans le document et modifier sa mise en forme à l'aide de l'onglet Outils de dessin]

chargé que toi ». Combien de sacs porte chaque animal ?

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

$a)\ \sqrt{3x+1}=4-x;$ $\quad b)\ x-\sqrt{2x+1}=7;$ $\quad c)\ \sqrt{-x^2+4x+5}=x-6;$

$d)\ 1+\sqrt{3x^2-2x-1}=x;$ $\quad e)\ \sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x-4}\ ;$ $\quad f)\ \sqrt{-x^2+5x+9}=\sqrt{x-3};$

$g)\ \sqrt{7-x}\le x-1;$ $\quad h)\ \sqrt{3(x^2-1)}\le 2x-1;$ $\quad h)\ \sqrt{x^2-9}\le x-9.$

$i)\ \sqrt{x+1}>5-x;$ $\quad j)\ x+\sqrt{x-1}>3;$ $\quad k)\ 2-x<\sqrt{x^2-5x+4};$

$l)\ \sqrt{5-x}>\sqrt{x-3};$ $\quad m)\ \sqrt{1-x}>\sqrt{2x-3};$ $\quad n)\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\ge 3.$

Exercice 3 :

Résoudre les systèmes suivants :

$$a)(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ \begin{cases}3x-y+2z=13\\ x+3y-5z=-16\\ 4x+2y-z=3\end{cases};\quad b)(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ \begin{cases}x+2y-z=8\\ 2x+y+2z=-2\\ x+y+3z=-6\end{cases};$$

Exercice 4 :

A. Un groupe d'élèves réserve un voyage pour un montant total de 21600F. Pour 30 Participants de plus il aurait obtenu une réduction de 20F par billet et aurait payé un total de 24000F. Quel est le prix d'un billet et le nombre d'élèves participant à ce voyage ?

B. Ali a un jardin de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et un champ de forme rectangulaire dont l'aire est le double de l'aire du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du jardin augmenté de 44 mètres. L'aire du champ étant égale à 64m2, calculer les dimensions du jardin puis celles du champ.

Exercice 5 :

A. Trouve un polynôme admettant pour racines -2 et 3.

B. Trouve un polynôme admettant pour racines -1;0 et 5.

C. Soit P la fonction polynôme de degré 4 telles que :

$P(0)=-10\ ;\ P(1)=-11\ ;\ P(-1)=-7\ ;\ P(2)=56\ ;\ P(-2)=4.$

Trouver le polynôme P pour tout nombre réel x.

Exercice 6 :

A. Soit le polynôme $f(x)=x^4+3x^3-5x^2-13x+6$

a. Calculer $f(2)$ *et* $f(-3)$

b. En déduire une factorisation de $f(x)$

c. Trouvez les zéros de f et leur ordre de multiplicité.

[Tapez une citation prise dans le document, ou la synthèse d'un passage intéressant. Vous pouvez placer la zone de texte n'importe où dans le document et modifier sa mise en forme à l'aide de l'onglet Outils de dessin]

d. Etudier le signe de $f(x)$ puis en déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

A. Soit le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouver les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$. soit divisible par $g(x)$.

B. Montre que la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme Q que l'on déterminera.

C. Soit le polynôme $K(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

1. Trouve les réels a et b tels que pour tout réel x, $K(x) = (x^2 + ax + b) - x^4$

2. Déduis en une factorisation de $K(x)$.

Exercice 7 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de $f(x)$ dans les cas suivants

$$a)\ f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} \quad ; \quad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 19x - 30} \quad ; \quad c)\ f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$$

Exercice 8 :

A. Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$. Montre qu'il existe trois réels a ; b ; c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\};\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.

B. Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f

2. Trouve les réels a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{x + 2}$

C. Soient f et g deux fonctions polynômes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4 \quad et \quad g(x) = (x - 1)^2$$

1. En effectuant la division euclidienne de f par g montrer qu'il existe 4 réels a, b, c, d telles que pour tout $x \neq 1$; $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 1)^2}$

2. En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouve les constantes réels a ; b ; c telles que $\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$.

Exercice 9 :

On considère la fonction polynôme P définit par $P(t) = t^3 - 15t + 12$.

[Tapez une citation prise dans le document, ou la synthèse d'un passage intéressant. Vous pouvez placer la zone de texte n'importe où dans le document et modifier sa mise en forme à l'aide de l'onglet Outils de dessin]

1. En admettant que u, v et w sont les zéro de P, donne la factorisation de $P(t)$. Précise l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines.
2. Donne alors la nouvelle écriture de $P(t)$, ordonnée selon les puissances décroissantes de t dont les coefficients dépendent de u, v et w.
3. Montre que $\begin{cases} u+v+w=0 \\ uv+uw+vw=-15 \\ uvw=-12 \end{cases}$
4. Des résultats précédents, déduis le système suivant : $\begin{cases} u^2+v^2+w^2=30 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{4} \end{cases}$.

Exercice 10 :

Soient $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+1$ et $g(x)=X^2-4X+3$.

1. Vérifie que $\frac{f(x)}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$ pour $x\neq 0$.
2. Déduis que $f(x)=0 \iff g(X)=0$ avec $X=x+\frac{1}{x}$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ $g(X)=0$.
4. Déduis l'ensemble des solutions de $f(x)=0$.

Exercice 11 :

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$: (E): $x^4+2x^3-8x^2+6x+9$.

Soit (E'): $x^2+2x-8+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}=0$.

1. le nombre zéro est-il solution de (E) ?
2. prouve que (E) et (E') sont équivalentes.
3. On pose $V=x+\frac{3}{x}$.

   Montre que si x est solution de (E') alors V est solution de $u^2+2u+14=0$
4. Résous dans $\mathbb{R}$ $u^2+2u+14=0$.
5. Déduis l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 12 :

A. On considère la fonction f définie par $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$

1. Prouve que $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+1)-f(x)=x^3$.

[Tapez une citation prise dans le document, ou la synthèse d'un passage intéressant. Vous pouvez placer la zone de texte n'importe où dans le document et modifier sa mise en forme à l'aide de l'onglet Outils de dessin]

2. Déduis en que $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

B. On considère la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R};\ g(x)=\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\left(\frac{2x-1}{3}\right)$.

1. Prouve que $\forall x \in \mathbb{R}\ : g(x+1)-g(x)=x^2$.

2. Déduis en que $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 13 :

Soit l'équation paramétrique $(E_m):(m-2)x^2+(2m+2)x+10m-14=0$

1. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) est-il du premier degré ?

2. On suppose que (E_m) est du second degré.

a. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions de signe contraire ?

b. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions positives ?

c. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions négatives ?

d. Trouve entre les solutions x_1 *et* x_2 une relation indépendante de m.

Exercice 14:

Soit P le polynôme défini par : $P(x)=x^2+(2m+1)x+m^2+1$

Pour quelles valeurs de m le polynôme P admet deux (2) solutions a et b telles que :

1. $a^2+b^2=29$

2. $|a-b|=1$

On calculera a et b dans chacun des cas.

Exercice 15 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2 - (3k+1)x + 8 = 0$ tels que ses racines x_1 et x_2 vérifient la relation $x_1^2 + x_2^2 = 20$. Trouve le paramètre réel k

Exercice3 :

Soient a et b deux nombres réels distincts et f

Un polynôme définit par : $f(x)=a^2(b-x)+b^2(x-a)+x^2(a-b)$.

1. Démontre qu'il existe un polynôme g tel que pour tout nombre réel x:
$$P(x)=(x-a)(x-b)g(x)$$
2. Quel est le degré de g? Détermine g.
Déduis une factorisation de $f(x)$.