

FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE (11^{ème} S)

Exercice 1 :

Calcule les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x - 8}{7x^3 + 2x + 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{|x^2 - 4|}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x + 3}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}$
 7) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x - 3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2-x}{9-x^2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \cos^2 x}$
 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{2 - \sqrt{x+2}}$; 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3}}$; 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{1 + \sin^2 x}$
 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \tan x \right)$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x}$; 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$
 22) ; 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$; 23) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2x - \frac{\pi}{2}}$; 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$; 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\sin x}$.

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes donne l'ensemble de définition D_f puis calcule les limites aux bornes de D_f et en déduis les équations des asymptotes éventuelles.

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1}$; 3) $f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + 2x - 3}$; 4) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$; 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$;
 6) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x + 2}$; 7) $f(x) = \frac{6x - 2}{-2x + 8}$; 8) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x^2 - x + 2}$; 9) $f(x) = x^2 + \cos x$; 10) $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Exercice 3 :

- 1) Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}{3x^2 + 3x - 6}, \text{ si } x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(-2) = -1 ; f(1) = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $x = -2$? en $x = 1$?

- 2) Soient la fonctions numériques g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} \\ g(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Etudie la continuité de g en 0.

- 2) Soit la fonction numérique f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} ; \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

Détermine l valeur de m pour que f soit continue au point d'abscisse $x = 2$.

- 3) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -3 \\ f(-3) = f(3) = 6 \end{cases}$$

Détermine l'ensemble de définition de f .

f est-elle continue en -3 et en 3 ?

- 4) Trouve le nombre réel K pour que la fonction P soit continue en 0.
$$\begin{cases} P(x) = \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{4\cos^2 x - 6\cos x + 2} \\ P(0) = K \end{cases}$$

Exercice 4 :

1) Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f et détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

- a) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $x_0 = 0$; c) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, $x_0 = 1$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

2) Vérifie que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis détermine sa fonction dérivée.

- 1) $f(x) = 3x - 4 + \frac{2}{2x+7}$; 2) $f(x) = \frac{2+3x}{-x^2+3x-2}$; 3) $f(x) = \frac{3x(x^2+4)}{(x-5)^4}$; 4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1}$; 5) $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
6) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3-x^2}$; 7) $f(x) = \left(\frac{x-1}{3x+1}\right)^2$; 8) $f(x) = x - \sqrt{2x+3}$; 9) $f(x) = x\sqrt{x}$; 10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-5x}}$
11) $f(x) = \cos(-3x + \pi)$; 12) $f(x) = \sin^2(2x - \frac{\pi}{4})$; 13) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\cos^2 x}$; 14) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$;
15) $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x + 1$; 16) $f(x) = x \sin x$; 17) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; 18) $f(x) = \frac{\tan x}{1+\tan x}$.

Exercice 6 :

Détermine pour chacune des fonctions suivantes une équation de la tangente (T) à sa représentation graphique au point d'abscisse x_0 .

- 1) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 5$ et $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2x-7}{3x-4}$ et $x_0 = -\frac{5}{3}$; 3) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ et $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sqrt{3x+9}$ et $x_0 = 0$; 5) $f(x) = x^2 \sin x$ et $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 6) $f(x) = \cos x$ et $x_0 = \pi$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ avec a et b des nombres réels.

- 1) détermine a et b pour que la représentation graphique de f :

* Passe par $A(0; 2)$

* Admette en A une tangente (T) de coefficient directeur 3.

- 2) Précise la position relative de (T) par rapport à la courbe de f .

Exercice 8 :

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On donne la fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 3x^2 - 8x - 1$.

- 1) Détermine le point de la représentation graphique (C_f) de f , où la tangente à (C_f) est parallèle à la droite (D) d'équation $y = 4x - 3$.
2) Déterminer le point de la représentation graphique (C_f) de f , où la tangente à (C_f) est perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $2y = x + 6$.

Problème 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

On désigne par (C) la représentation graphique de f .

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
2) a) Détermine la fonction dérivée f' de f . En déduis le sens de variation de f .
b) Dresse le tableau de variation de f . En déduis les extremums relatifs de f .
3) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
4) a) Complète le tableau de valeurs suivantes.
b) Construire (C) et (T).
5) Montrer que le point $A(1; 2)$ est un centre de symétrie de (C).

Problème 2 :

Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
2) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Calcule $f'(x)$.
4) Ecris une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.
5) Etudie le sens de variation de f .

6) Dresse le tableau de variation de f .

7) Construis (C_f) .

Problème 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b et c sont des réels.

1) Calcule $f'(x)$.

2) Détermine les réels a, b et c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.

3) Etudie la fonction f .

4) Trace la courbe (C_f) de f .

Problème 4 :

1) Aux trois réels a, b et c on associe la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé.

Détermine les constantes a, b et c pour que (C) passe par les points $A(1; -2)$; $B(-4; 8)$ et admet au point $x = 2$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 4}{x}$.

a) Etudie les variations de la fonction f .

b) Montre que le point d'intersection I des asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C) .

c) Etudie la position de (C) par rapport à son asymptote oblique (Δ) .

d) Construis la droite (Δ) et la courbe (C) .

e) Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solution de l'équation :

$$-x^2 + (3 - m)x - 4 = 0$$

Problème 5 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{ax+b}{x+c} \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels.}$$

On désigne par (H) sa courbe représentative dans le plan rapport à un repère orthonormé.

1) Détermine les nombres réels a, b et c pour que :

- (H) passe par le point $A(1; 4)$

- La tangente à (H) au point $B(5; 0)$ admet 1 pour coefficient directeur et la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe (H) .

2) Vérifie que le point $\Omega(3; 2)$ est centre de symétrie de (H) .

3) Trouve la pente de la tangente à (H) au point A .

4) Calcule les coordonnées du point d'intersection de des tangentes à (H) respectivement aux points A et B .

Problème 6 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f .

2) Calcule les limites aux bornes de D_f .

3) Détermine les réels $a; b$ et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C_f) .

b) Détermine la position de la courbe (C_f) et de la droite (D) .

5) Montre que le point $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_f) .

6) Détermine une équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse -2 .

7) Etudie la continuité et la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse nul.

8) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis dresse le tableau de variation de f .

9) Construis la courbe (C_f) et la droite (D) dans le même repère.

Problème 7 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Détermine les réels $a; b; c$ et d tel que :

a) La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

b) La courbe C_f passe par le point $A(-\frac{1}{2})$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5 .

2) Etudie la fonction f puis représente sa courbe (C_f) dans le repère.

Problème 8 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Etudie et construis la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

2) Montre que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (C_f)

3) Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0.$$

4) Montre que la restriction h de f à l'intervalle $I = [2; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que tu préciseras. Construis la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le repère

$(O; \vec{i}; \vec{j})$. Puis calcule $(h^{-1})'(\frac{7}{2})$.

Problème 9 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 2x| + 2$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Etudie le signe de $x^2 - 2x$ puis écris $f(x)$ par intervalles.

2) Calcule les limites de f quand x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

3) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis en 2. En déduis que (C) admet des demi-tangentes en ces points dont tu détermineras une équation.

4) Calcule la fonction dérivée f' de f et dresse le tableau de variation de f .

5) Tracer (C) ainsi que les quatre demi-tangentes.

Problème 10 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{ax+b}{c-x}$ où a, b et c sont des nombres réels.

On désigne par (H) sa représentation graphique.

1) Détermine les nombres réels a, b et c pour que :

- (H) admette les asymptotes d'équations respectives : $x = -2; y = 1$.

- La tangente à (H) au point d'abscisse -1 soit parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

2) Construis (H) .

Problème 11 :

Partie A :

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-4}$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et (C_f) a courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Détermine D_f l'ensemble de définition de f

2) Calcule $f'(x)$ la dérivée de f

3) Détermine a et b pour que (C_f) passe par le point $A(0; -\frac{5}{4})$ et admette une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

Partie B :

Dans cette partie, on prend $a = -2$ et $b = 5$

- 1) Etudie les limites aux bornes de D_f
- 2) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation
- 3) Déterminer les points d'intersections B et C de (C_f) avec respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(0; -\frac{5}{4})$
- 5) Construis (C_f) .

Problème 12 :

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

f est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des nombres réels.

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f .
- b) Donne les limites aux bornes de D_f .
- 2) a) Calcule $f'(x)$.
- b) Trouve les coefficients a, b et c en utilisant les données ci-dessus.
- 3) a) Démontre que la courbe (C) de f admet deux asymptotes (dont une non parallèle aux axes de coordonnées), dont tu détermineras les équations.
- b) Etudie la position de (C) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées.
- 4) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 2.
- b) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .
- c) Donner le signe de $f(x)$ pour tout x élément du domaine de définition de f .
- 5) Montrer que le point I , intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe (C) .

Problème 13 :

On veut étudier les variations de la fonction $g(x) = 2x - \cos 2x + 4 \sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \sin 2x + 2 \cos x$.

- 1) Vérifie que 2π est la période de f .
- 2) a) Montre que le point de la courbe de f d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- b) Propose un domaine d'étude de f .
- 3) a) Montre que $f'(x) = -2(2 \sin x - 1)(1 + \sin x)$.
- b) En déduis les variations de f .
- 4) Trace la courbe de f dans un repère dont l'unité est laissée à votre sagesse.
- 5) Etudie les variations de g sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

Problème 14 :

1) Soit $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$, puis étudie le signe de $P(x)$.

2) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x$.

- a) Justifie qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
- b) Montre que $f'(x) = 4 \cos 2x - 2 \cos x - 2$.
- c) Etudie les variations de f sur $[0; \pi]$ en utilisant la question 1).
- 3) Trace une période de la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.