

Ressources pédagogiques

Mathématiques

11^e Sciences

Système éducatif malien — 5 heures par semaine — coefficient 4

Exercices d'application et
d'approfondissement, exemples résolus,
situations complexes (APC), devoirs
de synthèse et sujets de composition

M. Almame TRAORÉ — Professeur de mathématiques (LBF - LPMT)

Sommaire — conforme au programme officiel de 11^e Sciences

UA1 — Applications, polynômes, équations, trigonométrie, étude locale

- Séquence 1 Les applications
- Séquence 2 Fonctions polynômes
- Séquence 3 Équations et inéquations (paramètres, bicarrées, irrationnelles, systèmes)
- Séquence 4 Trigonométrie : angles orientés et formules
- Séquence 5 Équations et inéquations trigonométriques
- Séquence 6 Limites et continuité
- Séquence 7 Dérivation

UA2 — Suites, dénombrement, études de fonctions, géométrie plane

- Séquence 8 Suites numériques
- Séquence 9 Dénombrement
- Séquence 10 Étude de fonctions
- Séquence 11 Vecteurs, barycentre et produit scalaire
- Séquence 12 Projections, isométries et similitudes

UA3 — Probabilités, géométrie dans l'espace, statistique

- Séquence 13 Probabilités
- Séquence 14 Géométrie dans l'espace
- Séquence 15 Statistique

Évaluations

- Devoirs Un devoir de synthèse de 2 h (sur 20) à la fin de chaque séquence
- Compositions Trois sujets trimestriels et deux sujets d'examen de fin d'année (3 h, sur 20)
- Corrigés Éléments de correction des situations complexes, des devoirs et des compositions

Mode d'emploi

Chaque séquence comprend un encadré **L'essentiel à retenir**, des **exercices d'application**, des **exercices d'approfondissement**, deux **situations complexes** (contexte, support, fonction, consignes) ancrées dans les réalités du Mali, des **exemples résolus** avec tableaux de variations, courbes et figures, les **exercices du recueil** de la classe (repris, vérifiés et corrigés lorsque c'était nécessaire), puis un **devoir de synthèse de 2 heures** noté sur 20. Le livret se termine par **cinq sujets de composition de 3 heures** et par des **éléments de correction** de toutes les situations complexes, des devoirs et des compositions. Des **fiches méthodes** sont proposées au début. Les consignes s'adressent directement à toi : lis-les attentivement et rédige avec soin.

Table des matières

Fiches méthodes	5
Unité d'apprentissage 1	8
Séquence 1 — Les applications	9
Devoir de synthèse (2 h)	19
Séquence 2 — Fonctions polynômes	20
Devoir de synthèse (2 h)	27
Séquence 3 — Équations et inéquations	28
Devoir de synthèse (2 h)	37
Séquence 4 — Trigonométrie : angles orientés et formules	38
Devoir de synthèse (2 h)	46
Séquence 5 — Équations et inéquations trigonométriques	47
Devoir de synthèse (2 h)	54
Séquence 6 — Limites et continuité	55
Devoir de synthèse (2 h)	62
Séquence 7 — Dérivation	63
Devoir de synthèse (2 h)	69
Unité d'apprentissage 2	70
Séquence 8 — Suites numériques	71
Devoir de synthèse (2 h)	77
Séquence 9 — Dénombrement	78
Devoir de synthèse (2 h)	84
Séquence 10 — Étude de fonctions	85
Devoir de synthèse (2 h)	96
Séquence 11 — Vecteurs, barycentre et produit scalaire	97
Devoir de synthèse (2 h)	103
Séquence 12 — Projections, isométries et similitudes	104
Devoir de synthèse (2 h)	110

Unité d'apprentissage 3	111
Séquence 13 — Probabilités	112
Devoir de synthèse (2 h)	117
Séquence 14 — Géométrie dans l'espace	118
Devoir de synthèse (2 h)	123
Séquence 15 — Statistique	124
Devoir de synthèse (2 h)	130
Compositions	131
Sujet de composition n° 1 — Premier trimestre (applications, polynômes, équations et inéquations)	132
Sujet de composition n° 2 — Deuxième trimestre (trigonométrie, limites, dérivation, étude de fonctions)	133
Sujet de composition n° 3 — Troisième trimestre (suites, dénombrement, probabilités, géométrie, statistique)	134
Sujet de composition n° 4 — Examen de fin d'année — sujet A	135
Sujet de composition n° 5 — Examen de fin d'année — sujet B	136
Éléments de correction	137
Corrigés des situations complexes	138
Corrigés des devoirs et des compositions	145
Formulaire et cercle trigonométrique	148

Fiches méthodes

Les démarches à connaître pour réussir les exercices, les devoirs et les situations complexes.

Fiche 1 — Traiter une situation complexe (APC)

- 1) **Lis le contexte** et repère la question réelle posée (que veut-on savoir ou décider ?).
- 2) **Exploite le support** : relève toutes les données chiffrées, les unités et les contraintes ; fais un schéma si possible.
- 3) **Prends ta fonction au sérieux** : tu es le conseiller, le technicien, le délégué : ta réponse doit être utilisable par la personne qui te consulte.
- 4) **Mathématise** : choisis les inconnues, traduis les phrases en équations, en fonctions ou en dénombrements.
- 5) **Résous** chaque consigne dans l'ordre ; chaque consigne prépare souvent la suivante.
- 6) **Vérifie et conclus** : contrôle la vraisemblance (ordre de grandeur, unités, signe), puis rédige une phrase de réponse claire, avec l'unité.

Fiche 2 — Montrer qu'une application est bijective et trouver sa réciproque

- 1) Vérifie que f est une **application** de E dans F : tout x de E a une image et cette image est dans F .
- 2) Pour $y \in F$ quelconque, **résous l'équation** $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
- 3) S'il y a toujours **une et une seule** solution dans E , f est bijective et cette solution est $f^{-1}(y)$.
- 4) Variante : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- 5) Pour tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, prends le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $y = x$ (repère orthonormé).

Fiche 3 — Écrire une fonction sans valeur absolue

- 1) Cherche les valeurs qui annulent chaque expression placée entre les barres.
- 2) Fais un **tableau de signes** de ces expressions sur $\mathbb{R}$.
- 3) Sur chaque intervalle, remplace $|X|$ par X ou par $-X$ et simplifie.
- 4) Contrôle : aux points de raccord, les formules voisines donnent la même valeur (la fonction est continue).

Fiche 4 — Discuter une équation du second degré à paramètre

- 1) Étudie à part la valeur de m qui annule le coefficient de x^2 (équation du premier degré).
- 2) Calcule Δ (ou Δ'), $P = \frac{c}{a}$ et $S = -\frac{b}{a}$ en fonction de m .
- 3) Dresse un **tableau de signes** de Δ , P et S en fonction de m .
- 4) Conclue intervalle par intervalle : nombre de racines, puis signes (règles de P et S).
- 5) Pour une relation indépendante de m , exprime S et P à l'aide d'une même quantité (souvent $\frac{1}{m-a}$), puis élimine-la.

Fiche 5 — Résoudre une équation trigonométrique

- 1) Ramène l'équation à l'une des formes $\cos u = \cos v$, $\sin u = \sin v$ ou $\tan u = \tan v$, en utilisant les valeurs remarquables ($\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$, ...).
- 2) Pour $a \cos x + b \sin x = c$, factorise par $\sqrt{a^2 + b^2}$ et reconnais $\cos(x - \varphi)$.
- 3) Pour une équation du second degré en $\cos x$ ou $\sin x$, pose $X = \cos x$ (ou $\sin x$) et n'oublie pas que $-1 \leq X \leq 1$.
- 4) Pour une somme de sinus ou de cosinus, transforme-la en produit.
- 5) Écris toutes les solutions avec $+2k\pi$ (ou $+k\pi$), puis sélectionne celles de l'intervalle demandé en donnant des valeurs à k ; place-les sur le cercle trigonométrique.

Fiche 6 — Lever une indétermination dans un calcul de limite

- 1) Forme $\frac{0}{0}$ en a avec des polynômes : factorise numérateur et dénominateur par $(x - a)$ et simplifie.
- 2) Forme $\frac{0}{0}$ avec des racines carrées : multiplie par l'expression conjuguée.
- 3) Forme $\frac{0}{0}$ avec $\sin$, $\cos$, $\tan$: fais apparaître $\frac{\sin u}{u}$, $\frac{\tan u}{u}$ ou $\frac{1 - \cos u}{u^2}$ avec $u \rightarrow 0$.
- 4) Forme $\frac{\infty}{\infty}$ en $\pm\infty$: garde les termes de plus haut degré ; avec des racines, mets x^2 en facteur sous la racine ($\sqrt{x^2} = |x|$).
- 5) Forme $\infty - \infty$ avec une racine : multiplie par le conjugué.

Fiche 7 — Étudier une fonction et tracer sa courbe

- 1) Ensemble de définition ; parité, périodicité éventuelles (pour réduire l'intervalle d'étude).
- 2) Limites aux bornes ; asymptotes verticales et horizontales.
- 3) Dérivée, **factorisée**, et son signe ; tableau de variations complet (valeurs des extremums).
- 4) Asymptote oblique : écris $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$; position :

signe de $\varepsilon(x)$.

- 5) Éléments de symétrie : centre $I(a; b)$ si $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- 6) Points particuliers : intersections avec les axes, tangentes utiles.
- 7) Trace d'abord les asymptotes et les tangentes, place les points, puis la courbe.

Fiche 8 — Dénombrer et calculer une probabilité

- 1) Décris précisément l'épreuve : tirage **simultané** (combinaisons), **succes-sif sans remise** (arrangements), **successif avec remise** (listes n^p).
- 2) Calcule $\text{card } \Omega$ avec le modèle choisi ; vérifie que les éventualités sont équiprobables.
- 3) Dénombrer les cas favorables **avec le même modèle** ; utilise un arbre ou le principe multiplicatif.
- 4) Pour « au moins un », calcule la probabilité de l'événement contraire « aucun ».
- 5) Contrôle : une probabilité est comprise entre 0 et 1 ; la somme des probabilités des cas d'une partition vaut 1.

Fiche 9 — Démontrer par récurrence

- 1) Énonce clairement la propriété $P(n)$ à démontrer.
- 2) **Initialisation** : vérifie $P(n_0)$ par un calcul.
- 3) **Hérédité** : suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et démontre $P(n + 1)$ en utilisant cette hypothèse.
- 4) **Conclusion** : « d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ».

Fiche 10 — Utiliser le produit scalaire

- 1) Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires : produit scalaire de deux vecteurs directeurs nul.
- 2) Pour calculer un angle : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
- 3) Pour une ligne de niveau : introduis le milieu I (ou un barycentre G) dans les vecteurs, développe, et reconnais un cercle, une droite, un point ou l'ensemble vide.
- 4) Dans un triangle dont on connaît les trois côtés : Al-Kashi donne les angles, puis l'aire $\frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$.

Unité d'apprentissage 1

UA1

Applications · Fonctions polynômes · Équations et inéquations · Trigonométrie · Limites, continuité, dérivation

Séquence 1

Les applications

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Applications injectives, surjectives, bijectives ; application réciproque ; application composée ; restriction, prolongement ; image directe et image réciproque d'une partie.

L'essentiel à retenir

- Une **fonction** f de E vers F associe à chaque x de E **au plus** une image. L'ensemble des x qui ont une image est l'ensemble de définition D_f . f est une **application** de E dans F lorsque **tout** élément de E a exactement une image dans F (c'est-à-dire $D_f = E$ et $f(E) \subset F$).
- Deux applications sont **égales** si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même image pour tout x .
- Si $A \subset E$, la **restriction** de f à A est l'application $g : A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$; on dit aussi que f est un **prolongement** de g .
- **Image directe** de A : $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$. **Image réciproque** de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$. Pour une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$: $f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)]$ si f croît, $[f(b) ; f(a)]$ si f décroît.
- f est **injective** si deux éléments distincts ont des images distinctes : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. f est **surjective** si tout y de F a au moins un antécédent : $f(E) = F$. f est **bijective** si tout y de F a **exactement un** antécédent : l'équation $f(x) = y$ a une unique solution $x \in E$.
- Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, sa **réciproque** $f^{-1} : F \rightarrow E$ est définie par $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$; on a $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$. Dans un repère orthonormé, la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
- **Composée** : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, définie lorsque $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$. En général $g \circ f \neq f \circ g$.
- **Valeur absolue** : $|X| = X$ si $X \geq 0$, $|X| = -X$ si $X \leq 0$. Pour écrire $f(x)$ sans valeur absolue, on fait un tableau de signes des expressions intérieures.

Exercices d'application**Exercice 1** — Fonction ou application ?

Détermine l'ensemble de définition de chaque fonction, puis dis, en justifiant, si c'est une application de l'ensemble de départ indiqué.

1) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

5) $f_5 :]-\infty; -5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4}$

2) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x - 4}{x - 2}$

6) $f_6 : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

3) $f_3 : [6; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x - 5}$

7) $f_7 :]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x - 1}{x - 3}$

4) $f_4 :]-\infty; -1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{-2 - x}$

8) $f_8 : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} + 3$

Exercice 2 — Image directe, image réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 4x - 1$.

- 1) Écris $f(x)$ sous forme canonique et dresse le tableau de variations de f .
- 2) Détermine les images directes $f([1; 3])$, $f([-3; -2])$ et $f([-2; 3])$.
- 3) Pour $g(x) = x^2 - x - 2$, détermine $g^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\{-2\})$.

Exercice 3 — Injective ? surjective ? bijective ?

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[, x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$. Montre que f est bien une application, qu'elle est surjective mais non injective.
- 2) Soit $g : [0; 2] \rightarrow [0; 1], x \mapsto x^2 - 2x + 1$. g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 3) Soit $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $h(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $h(n) = \frac{n+1}{2}$ si n est impair. Montre que h est surjective mais pas injective.

Exercice 4 — Bijection et réciproque

Dans chaque cas, démontre que l'application est bijective et détermine sa réciproque.

- 1) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{4x - 1}{2x - 4}$. Que remarques-tu ?
- 2) $g : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x - 1}{x + 3}$.
- 3) $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x; y) \mapsto (x - 2y; x + 3y)$.
- 4) $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x; y) \mapsto (x + 3; y - 2)$.

Exercice 5 — Applications composées

Dans chaque cas, détermine l'ensemble de définition de $g \circ f$, puis calcule $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ (si possible) et $(g \circ f)(x)$.

- 1) $f(x) = 5 + 2x$ et $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.
- 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$.
- 3) Soit $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = ax + b$ (a, b réels). Calcule $g \circ f$ et $f \circ g$, puis trouve une condition sur $(a; b)$ pour que $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 6 — Écrire sans valeur absolue ; restriction

- 1) Écris sans valeur absolue $f(x) = |2x + 1| - |x - 3|$ et donne la restriction de f à chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}; 3]$ et $[3; +\infty[$.
- 2) Même question pour $h(x) = |x + 1| + 3|4 - x|$ et les intervalles $[-1; 3]$, $[5; 8]$, $[-10; -2]$.
- 3) Soit $u(x) = |2x - 1| + |1 - x|$. Trouve une fonction affine v , différente de u , qui coïncide avec u sur $[\frac{1}{2}; 1]$, puis trace la courbe de u .

Exercices d'approfondissement**Exercice 7** — Résoudre $g(x) = y$ pour obtenir une bijection

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

- 1) Vérifie que $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$. Résous, suivant les valeurs du réel y , l'équation $g(x) = y$.
- 2) Déduis-en deux ensembles I et J tels que l'application $I \rightarrow J, x \mapsto g(x)$ soit bijective, puis donne sa réciproque.

Exercice 8 — Restriction bijective et point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

- 1) Montre que $f([1; 2]) = [-\frac{1}{4}; 0]$ et détermine $f^{-1}([0; 1])$.
- 2) Soit g la restriction de f à $I = [\frac{3}{2}; +\infty[$. Montre que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser et détermine g^{-1} .
- 3) Résous dans I l'équation $g(x) = x$. On note α sa solution. Vérifie par le calcul que $g^{-1}(\alpha) = \alpha$ (tu pourras développer $(1 + 2\sqrt{2})^2$).

Exercice 9 — Décomposer une fonction

Trouve deux fonctions u et v telles que $h = v \circ u$ dans chacun des cas :

$$h_1(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$$

$$h_2(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad h_3(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$h_4(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2} \quad h_5(x) = (3x + 1)^2 \quad h_6(x) = (x + 5)^3 + 4$$

Situations complexes

Situation complexe 1.1 Fonction affine par morceaux · bijection · réciproque**La facture d'électricité de la famille Coulibaly****1 · Contexte**

La famille Coulibaly, à Kalaban Coura, reçoit chaque mois une facture d'électricité. Le père veut comprendre comment le montant est calculé et retrouver sa consommation à partir de la somme payée.

2 · Support

Le fournisseur applique le tarif suivant (simplifié) : une redevance fixe de 1 500 F ; 100 F le kWh pour les 100 premiers kWh ; 130 F le kWh au-delà de 100 kWh. On note x la consommation mensuelle en kWh et $C(x)$ le montant de la facture en francs CFA.

3 · Fonction

Tu es l'aîné de la famille, élève en 11^e Sciences. Ton père te demande de lui expliquer sa facture.

4 · Consignes

- ❶ Calcule $C(80)$ et $C(150)$. Montre que $C(x) = 100x + 1\,500$ si $0 \leq x \leq 100$ et $C(x) = 130x - 1\,500$ si $x > 100$.
- ❷ Montre que C est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1\,500; +\infty[$ et exprime $C^{-1}(y)$.
- ❸ En mars, la famille a payé 24 500 F. Détermine sa consommation. Trace les courbes de C et C^{-1} pour $x \in [0; 200]$.

Situation complexe 1.2 Application composée · image réciproque**La coopérative de beurre de karité de Koutiala****1 · Contexte**

Une coopérative de femmes de Koutiala transforme les amandes de karité en beurre qu'elle vend sur le marché. La présidente veut savoir quelle quantité d'amandes acheter pour atteindre un bénéfice donné.

2 · Support

Avec x kg d'amandes, on obtient $f(x) = 0,4x$ kg de beurre. La vente de y kg de beurre rapporte un bénéfice $g(y) = 1\,500y - 2\,000$ francs CFA (les 2 000 F correspondent aux frais fixes du marché).

3 · Fonction

Tu es le conseiller de la coopérative. Tu dois relier directement la quantité d'amandes au bénéfice.

4 · Consignes

- ❶ Calcule le bénéfice obtenu avec 50 kg d'amandes. Exprime $(g \circ f)(x)$ en fonction de x .

- ❷ Montre que $g \circ f$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle à préciser et détermine sa réciproque.
- ❸ Quelle quantité d'amandes faut-il transformer pour un bénéfice de 40 000 F ? Détermine l'image réciproque par $g \circ f$ de l'intervalle $[0; +\infty[$ et interprète.

Exemples résolus : bijection, réciproque et courbes

Exemple résolu — bijection d'une fonction du second degré restreinte

Énoncé. Soit $g : [1; 5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x - 3$. Détermine les zéros de g , l'image directe $g([1; 5])$, montre que g réalise une bijection de $[1; 5]$ sur un intervalle J , donne g^{-1} et trace les deux courbes.

1. Zéros

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ s'annule pour $x = -1$ et $x = 3$; seul 3 appartient à $[1; 5]$: g a un unique zéro, $x = 3$.

2. Variations et image directe

$g(x) = (x-1)^2 - 4$. Sur $[1; 5]$, $x-1 \geq 0$ et $x \mapsto (x-1)^2$ est strictement croissante. $g(1) = -4$ et $g(5) = 12$.

x	1	5
$g(x)$	-4	12



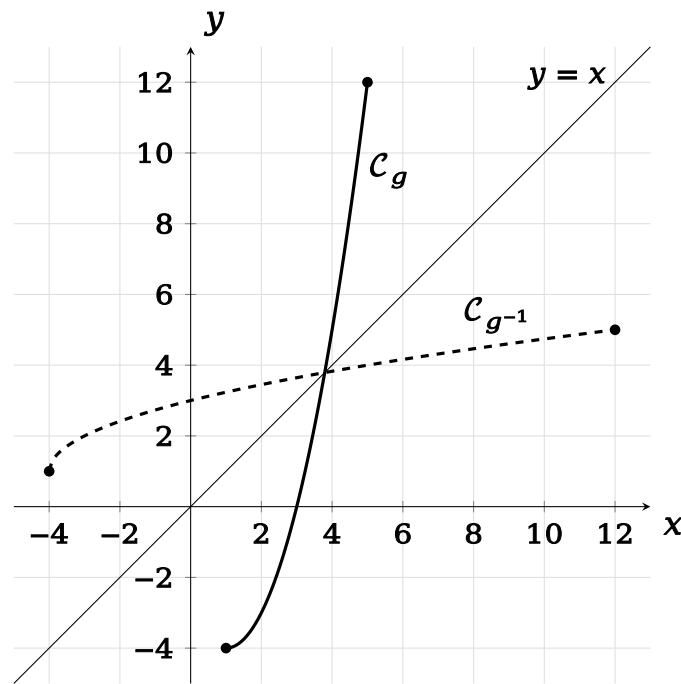
Donc $g([1; 5]) = [-4; 12] = J$.

3. Bijection et réciproque

Pour $y \in [-4; 12]$, l'équation $g(x) = y$ s'écrit $(x-1)^2 = y+4$ avec $x-1 \geq 0$, d'où l'unique solution $x = 1 + \sqrt{y+4}$, qui appartient bien à $[1; 5]$ car $0 \leq \sqrt{y+4} \leq 4$. Donc g est une bijection de $[1; 5]$ sur $[-4; 12]$ et $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4; 12]$.

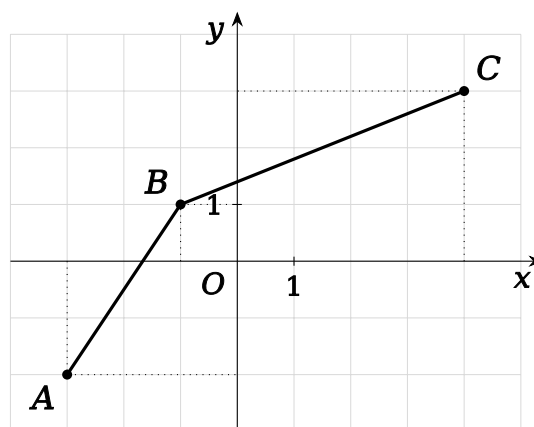
4. Courbes

La courbe de g^{-1} est la symétrique de celle de g par rapport à la droite $y = x$.



Exemple résolu — fonction définie par un graphique

Énoncé. La fonction f est représentée ci-dessous par la ligne brisée ABC avec $A(-3; -2)$, $B(-1; 1)$ et $C(4; 3)$.



1. Ensemble de définition et images directes

$D_f = [-3; 4]$. Par lecture : $f([-3; -1]) = [-2; 1]$, $f(]-1; 4]) =]1; 3]$, $f(\{-3; -1\}) = \{-2; 1\}$.

2. Images réciproques

$f^{-1}(]1; 3]) =]-1; 4]$; $f^{-1}(]-\infty; -3]) = \emptyset$ (la courbe ne descend pas sous -2) ; $f^{-1}([-2; 3]) = [-3; 4]$.

3. Formules explicites

Sur $[-3; -1]$: pente $\frac{1-(-2)}{-1-(-3)} = \frac{3}{2}$, d'où $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Sur $[-1; 4]$: pente $\frac{3-1}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$, d'où $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$.

4. Bijection réciproque

f est continue et strictement croissante sur $[-3; 4]$: c'est une bijection de $[-3; 4]$ sur $[-2; 3]$. $f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3}$ si $x \in [-2; 1]$ et $f^{-1}(x) = \frac{5x-7}{2}$ si

$x \in [1; 3]$; sa courbe est la ligne brisée $A'B'C'$ avec $A'(-2; -3)$, $B'(1; -1)$, $C'(3; 4)$.

Exercices du recueil (repris et vérifiés)

Exercice 10 — Bijection et racine carrée

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit $f : \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow [0; +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

- 1) Démontre que f est bijective et détermine sa bijection réciproque f^{-1} .
- 2) Construis la courbe représentative de f^{-1} , puis déduis-en celle de f .

Remarque : l'ensemble d'arrivée a été précisé $[0; +\infty[$ au lieu de $\mathbb{R}$, sinon f ne serait pas surjective.

Exercice 11 — Image directe et image réciproque d'une fonction rationnelle

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$.

- 1) Détermine les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+1}$.
- 2) Détermine l'image directe par f de $[2; 5]$ et l'image réciproque par f de $[0; 1]$.

Exercice 12 — Fonctions égales ?

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -|x|$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{-x^2}{|x|}$.

- 1) f et g sont-elles égales ? Justifie ta réponse.
- 2) Trouve le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

Exercice 13 — Racine carrée : tableau de valeurs et réciproque

Soit $h(x) = 2\sqrt{x+3}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_h .
- 2) Déduis-en le sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ tel que h soit une bijection de E sur $\mathbb{R}_+$, et donne l'expression de h^{-1} .
- 3) Complète le tableau de valeurs, trace $(\mathcal{C}_h)$, la droite $y = x$ et déduis-en $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$.

x	-3	-2	0	1	6
$h(x)$					

Exercice 14 — Composées et réciproque d'une fonction affine

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x + 3$; $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+4}{2x}$ et $h : [-2; 7] \rightarrow [0; 3], x \mapsto \sqrt{x+2}$.

- 1) Détermine $D_f, D_g, D_h, D_{g \circ f}$ et $D_{h \circ f}$.
- 2) Donne l'expression de $(g \circ f)(x)$ et de $(f \circ g)(x)$.
- 3) Montre que f est bijective, donne f^{-1} , puis trace $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé.

Exercice 15 — Image directe et réciproque

Soit l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [2; +\infty[, x \mapsto \frac{4+x^2}{2}$.

- 1) Détermine l'image directe par f de $A = \mathbb{R}_+, B = [2; 6]$ et $C = \{0; 2; 6\}$.
- 2) Détermine l'image réciproque par f de $P = [2; 10], K =]3; 4[$ et $J = \{0\}$.
- 3) L'application f est-elle bijective ? Si oui, détermine sa bijection réciproque.

Exercice 16 — Forme canonique et bijection

Soit $f : [3; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

- 1) Détermine deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$.
- 2) Utilise ce résultat pour montrer que si $x \in [3; +\infty[$, alors $f(x) \in [0; +\infty[$. Que peux-tu dire de f ?
- 3) Soit $y \in [0; +\infty[$. Combien l'équation $f(x) = y$ a-t-elle de solutions dans $[3; +\infty[$? f est-elle bijective ?

Exercice 17 — Fonction définie par morceaux

Soit g définie sur $[-1; 5]$ par $g(x) = |x - 1|$ si $x \in [-1; 3]$ et $g(x) = \frac{5x - 11}{2}$ si $x \in [3; 5]$.

- 1) Vérifie que les deux formules donnent la même valeur en 3, puis représente g dans un repère orthonormé.
- 2) Détermine graphiquement l'image par g des intervalles $[-1; 5],]0; 5]$ et $[-1; 0]$.
- 3) Détermine graphiquement l'image réciproque par g de $[1; 2],]2; 7[$ et $\{0\}$, puis vérifie par le calcul.

Exercice 18 — Deux fonctions homographique et affine

Soient $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto \frac{x}{x-1}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 2$.

- 1) Montre que f et g sont des bijections et donne leurs réciproques.
- 2) Calcule $(f \circ g)(0), (g \circ f)(0), (f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ en précisant les ensembles de définition.
- 3) Trouve $f([-2; -1]), g([-2; 0]), f^{-1}([2; 3])$ et $f^{-1}(]-\infty; 0])$.
- 4) Résous l'équation $f(x) = g(x)$. Les fonctions f et g coïncident-elles sur un intervalle ?

Remarque : dans le recueil, g était donnée de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R}_+^*$; ce n'est pas une application ($g(0) = -2$). On l'a corrigée.

Exercice 19 — Valeurs absolues et coïncidence

- 1) Soit $f(x) = |2x - 1| + |x - 3| - 1$. Détermine $f([-1; 1])$ et $f^{-1}(]5; +\infty[)$.
- 2) Soient $f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2$ et $g(x) = -4x - 5$. Détermine la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.
- 3) Soit $f(x) = 3x + |x - 2| + 3$. Écris $f(x)$ sans valeur absolue, donne la restriction g de f à $[2; +\infty[$, puis trouve $g(I)$ et $g^{-1}(J)$ pour $I = [3; 5]$ et $J = [9; 10]$.

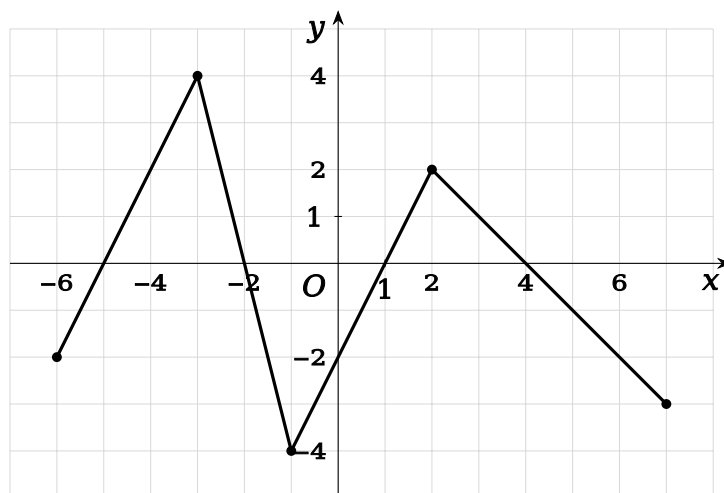
Exercice 20 — Composition du premier trimestre — applications

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}, x \mapsto \frac{2x - 1}{3x - 2}$.

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. f peut-elle être une bijection ? Pourquoi ?
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq 3$ et déduis-en l'image réciproque de $] -\infty; 3]$ par f .
- 3) Démonstre que g est une bijection, définis g^{-1} et calcule $(g \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

Exercice 21 — Lecture graphique

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-6; 7]$ (ligne brisée passant par les points $(-6; -2)$, $(-3; 4)$, $(-1; -4)$, $(2; 2)$ et $(7; -3)$).



- 1) Quelles sont les images de 3, -2, -6 et 0 par f ? Quels sont les antécédents de 2 ?
- 2) Résous graphiquement $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ et $f(x) < 2$.
- 3) Donne, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercices complémentaires

Exercice 22 — Injective, surjective par l'équation $f(x) = y$

Pour chaque application, résous $f(x) = y$ et conclus :

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 5$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$; $h : [0 ; +\infty[\rightarrow [1 ; +\infty[$,
 $x \mapsto x^2 + 1$;

2) $k : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x-3}{x+1}$ (donne k^{-1}).

Exercice 23 — Composées et décompositions

Soient $u(x) = x^2 - 1$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $w(x) = \frac{1}{x}$.

1) Détermine $v \circ u$, $u \circ v$, $w \circ u$ et $w \circ v \circ u$ en précisant leurs ensembles de définition.

2) Vérifie que $(u \circ v)(x) = x - 1$ sur $[0 ; +\infty[$; peut-on dire que $u \circ v = x \mapsto x - 1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 24 — Images d'intervalles par une fonction homographique

Soit $h(x) = \frac{x}{x-1}$. Montre que $h(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$, puis détermine $h([-2 ; -1])$, $h(]1 ; 3])$, $h^{-1}([2 ; 3[)$ et $h^{-1}(]-\infty ; 0[)$.

Devoir de synthèse — Séquence 1

Les applications

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Ensembles de définition et composéesSoient $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x-4}{x-1}$ et $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1; +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 1$.

- 1) Détermine D_f , D_g , $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$. (2 pt)
- 2) Calcule $(g \circ f)(2)$, $(f \circ g)(0)$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$. (2 pt)
- 3) Détermine $f^{-1}(\{1\})$ et $g([0; 3[\setminus \{1\})$. (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Valeur absolue et restrictionSoit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |2x - 1| + |x - 3| - 1$.

- 1) Écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue. (2 pt)
- 2) Représente f dans un repère orthonormé. (1,5 pt)
- 3) Détermine $f([-1; 1])$ et l'image réciproque $f^{-1}([2; 6])$. (2,5 pt)

Exercice 3 (8 points) — Bijection et réciproqueSoit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$.

- 1) Pour chaque réel y , résous dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $\frac{1+x^2}{2} = y$. (2 pt)
- 2) Utilise la question 1 pour montrer que g est injective et pour déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R}_+)$. (2 pt)
- 3) Montre que l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow g(\mathbb{R}_+)$, $x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$ est bijective et précise sa réciproque f^{-1} . (2 pt)
- 4) Trace dans un même repère orthonormé les courbes de f et de f^{-1} ainsi que la droite d'équation $y = x$. (2 pt)

Séquence 2

Fonctions polynômes

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Généralités ; égalité de deux polynômes ; factorisation et divisibilité ; division euclidienne ; zéros d'une fonction polynôme et ordre de multiplicité ; signe de $P(x)$.

L'essentiel à retenir

- Une **fonction polynôme** de degré n s'écrit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux (**identification**).
- a est un **zéro** (racine) de P si $P(a) = 0$. Alors $P(x)$ est **divisible** par $(x - a)$: $P(x) = (x - a)Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P - 1$. On trouve Q par identification, par division euclidienne ou par le tableau de Horner.
- a est un zéro d'**ordre** k si $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$ (zéro double si $k = 2$).
- **Division euclidienne** : pour $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q; R)$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. Pour x tel que $B(x) \neq 0$: $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$.
- **Trinôme** $ax^2 + bx + c$: forme canonique $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, deux zéros $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; le trinôme est du signe de a à l'**extérieur** des racines.
- Relations entre coefficients et racines : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Pour $ax^3 + bx^2 + cx + d$ de racines α, β, γ : $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$.
- **Signe** de $P(x)$: on factorise en produits de facteurs du premier et du second degré, puis on dresse un tableau de signes.

Exercices d'application**Exercice 1** — Forme canonique

Mets sous forme canonique, puis donne le nombre de zéros :

$$f_1(x) = 2x^2 + 6x + 15 \quad f_2(x) = x^2 + 4x + 5 \quad f_3(x) = 3x^2 + 9x + 1$$

$$f_4(x) = -x^2 - 5x + 4$$

$$f_5(x) = -2x^2 - 3x + 5 \quad f_6(x) = x^2 - 8x + 7 \quad f_7(x) = 3x^2 + 18x + 27$$

$$f_8(x) = x^2 + 10x + 1$$

Exercice 2 — Factorisation à partir d'une racine

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$.

- 1) Calcule $P(2)$. Détermine les réels a, b, c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$, puis l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 3 — Carré d'un polynôme

Montre que $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que tu détermineras (cherche $g(x) = x^2 + ax + b$).

Exercice 4 — Division euclidienne

Trouve le quotient et le reste de la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x - 1$;
- 2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x - 3$;
- 3) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.

Exercice 5 — Zéros et ordre de multiplicité

- 1) Soit $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$. Calcule $f(2)$ et $f(-3)$, déduis-en une factorisation de $f(x)$, puis trouve les zéros de f et leur ordre de multiplicité.
- 2) Soit $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Calcule $P(2)$ et $P(3)$; donne tous les zéros de P avec leur ordre de multiplicité.

Exercice 6 — Simplifier une fraction rationnelle

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, simplifie :

$$f_1(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + 6} \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 19x - 30}$$

$$f_3(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$$

$$f_4(x) = \frac{2x^2 - 7x - 4}{2x^3 + 7x^2 - 53x - 28}$$

Exercices d'approfondissement**Exercice 7** — Divisibilité par un trinôme

Soit $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouve les réels a et b pour que $f(x)$ soit divisible par $g(x)$ (remarque que $g(x) = (x - 2)(x - 3)$).

Exercice 8 — Polynôme défini par des valeurs

Soit P une fonction polynôme de degré 4 telle que $P(0) = -10$, $P(1) = -11$, $P(-1) = -7$, $P(2) = 56$ et $P(-2) = 4$. Détermine $P(x)$.

Exercice 9 — Relations entre coefficients et racines d'un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 14x + 8$. On admet que f a trois racines réelles distinctes α, β, γ .

- 1) Sans calculer les racines, calcule $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ puis $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
- 2) Calcule $f(-4)$, détermine les trois zéros de f et vérifie les résultats précédents.

Exercice 10 — Sommes de puissances

- 1) Détermine un polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 0$ et $P(x) - P(x-1) = x^2$ pour tout réel x . Dédus-en que $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 2) De même, avec un polynôme de degré 4 tel que $P(x) - P(x-1) = x^3$, montre que $S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Situations complexes**Situation complexe 2.1** Polynôme de degré 3 · racine évidente · factorisation**La boîte du ferblantier de Médina Coura****1 · Contexte**

Un ferblantier de Médina Coura fabrique des boîtes sans couvercle à partir de plaques de tôle rectangulaires. Un client commande des boîtes d'un volume précis.

2 · Support

Chaque plaque mesure 20 cm sur 12 cm. Aux quatre coins, on découpe un carré de côté x cm, puis on relève les bords. Le client veut des boîtes de volume 256 cm^3 .

3 · Fonction

Tu es l'apprenti du ferblantier. Tu dois trouver toutes les découpes possibles.

4 · Consignes

- 1 Montre que le volume de la boîte est $V(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)$ et précise les valeurs possibles de x .
- 2 Montre que $V(x) = 256$ équivaut à $x^3 - 16x^2 + 60x - 64 = 0$, vérifie que 2 est une solution et factorise.
- 3 Donne toutes les valeurs de x qui conviennent (valeurs exactes puis arrondies au mm).

Situation complexe 2.2 Somme des carrés · équation polynomiale**La pyramide de briques du maçon de Ségou**

1 • Contexte

Pour décorer l'entrée d'une concession à Ségou, un maçon construit une pyramide pleine en briques de terre : la couche du haut compte 1 brique, la suivante $2 \times 2 = 4$ briques, la suivante $3 \times 3 = 9$ briques, etc.

2 • Support

Le maçon dispose de 1 015 briques et veut toutes les utiliser. On admet que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 • Fonction

Tu es le fils du maçon. Tu dois lui dire combien de couches il peut construire.

4 • Consignes

- ❶ Calcule le nombre de briques d'une pyramide de 5 couches.
- ❷ Montre que le problème revient à résoudre $2n^3 + 3n^2 + n - 6\,090 = 0$.
- ❸ Vérifie que 14 est solution, factorise et conclus. Combien de briques compte la couche de base ?

Exemple résolu : factorisation, signe et courbe d'un polynôme**Exemple résolu — polynôme de degré 3**

Énoncé. Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$. Factorise $P(x)$, étudie son signe et interprète sur la courbe.

1. Racine évidente et tableau de Horner

$P(2) = 8 - 12 - 36 + 40 = 0$, donc $P(x)$ est divisible par $x - 2$.

	1	-3	-18	40
2		2	-2	-40
	1	-1	-20	0

Donc $P(x) = (x - 2)(x^2 - x - 20)$. Pour $x^2 - x - 20$: $\Delta = 81$, racines $\frac{1 \pm 9}{2}$, soit 5 et -4. Finalement $P(x) = (x - 2)(x - 5)(x + 4)$.

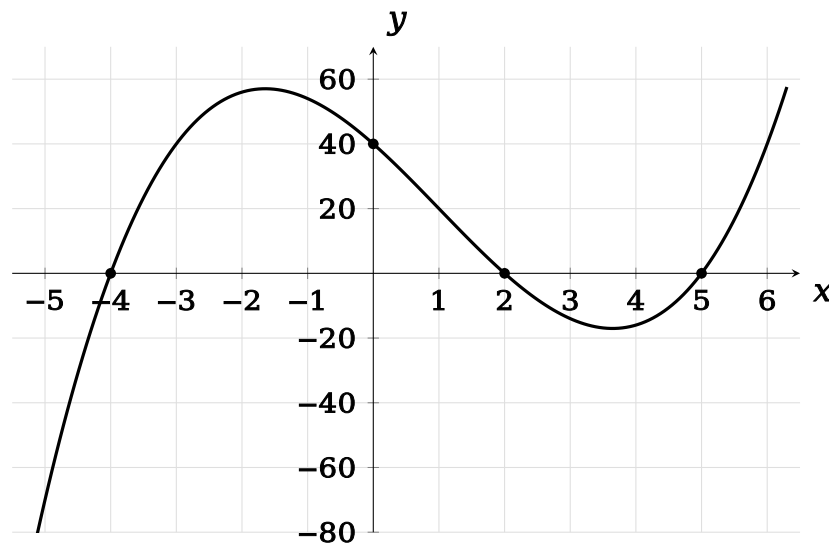
2. Tableau de signes

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$		
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-4; 2[\cup]5; +\infty[$.

3. Lecture sur la courbe

La courbe coupe l'axe des abscisses en -4 , 2 et 5 ; elle est au-dessus de cet axe exactement sur $] -4 ; 2[$ et sur $]5 ; +\infty[$.

**Exercices du recueil (repris et vérifiés)****Exercice 11** — Décomposition en éléments simples

Soient $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $g(x) = (x - 1)^2$.

- 1) En effectuant la division euclidienne de f par g , montre qu'il existe des réels a , b , c , d tels que, pour tout $x \neq 1$, $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 1)^2}$.
- 2) Par la méthode des coefficients indéterminés, trouve les réels a , b , c tels que $\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$.

Exercice 12 — Forme réduite d'une fonction rationnelle

- 1) Montre qu'il existe trois réels a , b , c tels que, pour tout $x \neq 2$, $\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- 2) Soit $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}$. Détermine son ensemble de définition, puis les réels a , b , c , d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{x + 2}$.

Exercice 13 — Différence de deux carrés

Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

- 1) Trouve les réels a et b tels que, pour tout réel x , $f(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
- 2) Dédus-en une factorisation de $f(x)$ et le signe de $f(x)$.

Exercice 14 — Une racine qui ne dépend pas du paramètre

Soit $P(x) = 3x^2 - ax + 2a - 12$, où a est un réel.

- 1) Vérifie que 2 est une racine de P pour toute valeur de a .
- 2) Factorise $P(x)$ et déduis-en l'autre racine en fonction de a .
- 3) Pour quelle valeur de a le nombre 2 est-il racine double ?

Remarque : l'énoncé du recueil demandait de « déterminer a pour que 2 soit racine » ; or $P(2) = 0$ quel que soit a . La question a été reformulée.

Exercice 15 — Sommes télescopiques

- 1) Trouve les réels A et B tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$. Déduis-en $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.
- 2) Trouve A, B, C tels que $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$. Déduis-en $T = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 16 — Composition du premier trimestre — racines sans les calculer

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. On suppose que P admet trois racines distinctes a, b et c .

- 1) Montre qu'il est possible de déterminer $a + b + c$, $ab + ac + bc$ et abc sans calculer les racines. Déduis-en la valeur de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
- 2) Résous $P(x) = 0$ et vérifie les résultats obtenus.

Exercice 17 — Polynôme, équation et inéquation rationnelle

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$.

- 1) Vérifie que $\frac{3}{2}$ est une racine de P , puis résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$.

Exercice 18 — Changement de variable

Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$.

- 1) Calcule $P(1)$, déduis-en une factorisation de $P(x)$ et résous $P(x) = 0$.
- 2) Déduis-en les solutions dans $\mathbb{R}$ de : a) $x^6 - 2x^4 - 19x^2 + 20 = 0$; b) $\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{19}{x} + 20 = 0$.

Exercices complémentaires

Exercice 19 — Tableau de Horner

Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

- 1) Calcule $P(3)$. À l'aide du tableau de Horner, écris $P(x) = (x - 3)Q(x)$.
- 2) Factorise complètement $P(x)$, puis résous $P(x) \geq 0$.

Exercice 20 — Coefficients inconnus

Détermine les réels a et b pour que $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ soit divisible par $(x - 1)(x + 2)$. Factorise alors $P(x)$ et dresse son tableau de signes.

Exercice 21 — Racine triple

Soit $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$.

- 1) Calcule $f(1)$ et $f(3)$.
- 2) Montre que $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)$. Quel est l'ordre de multiplicité de chaque zéro ?
- 3) Déduis-en le signe de $f(x)$.

Exercice 22 — Signe d'un produit de trinômes

Étudie le signe de $A(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 2x + 5)$ et de $B(x) = \frac{(x^2 - x - 6)(1 - x)}{x^2 + x + 1}$.

Devoir de synthèse — Séquence 2

Fonctions polynômes

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (8 points) — Factorisation et signeSoit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

- 1) Calcule $P(3)$. Détermine les réels a, b, c tels que $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$. (2 pt)
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. (2 pt)
- 3) Dresse le tableau de signes de $P(x)$ et résous $P(x) \leq 0$. (2 pt)
- 4) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^6 - 3x^4 - 11x^2 + 6 = 0$. (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Division euclidienneSoit $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.

- 1) Montre que 1 est un zéro de f et détermine son ordre de multiplicité. (3 pt)
- 2) Effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $x^2 + x - 1$. (3 pt)

Exercice 3 (6 points) — Racines d'un polynôme de degré 3Soit $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, de racines α, β, γ .

- 1) Sans les calculer, donne $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ et $\alpha\beta\gamma$. (2 pt)
- 2) Déduis-en $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$. (2 pt)
- 3) Vérifie que 1 est racine, calcule les deux autres et contrôle tes résultats. (2 pt)

Séquence 3

Équations et inéquations

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Deux nombres connaissant leur somme et leur produit ; équations paramétriques, existence et signe des racines ; comparaison d'un nombre aux racines ; équations bicarrées et changements de variable ; équations et inéquations irrationnelles ; systèmes.

L'essentiel à retenir

- **Somme et produit** : deux nombres de somme S et de produit P sont les solutions de $X^2 - SX + P = 0$ (ils existent si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$).
- Pour $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) de racines x' , x'' : $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ et $P = x'x'' = \frac{c}{a}$. On en déduit $x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P$, $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{S}{P}$, $(x' - x'')^2 = S^2 - 4P = \frac{\Delta}{a^2}$.
- **Signe des racines** (lorsque $\Delta \geq 0$) : $P < 0$: racines de signes contraires ; $P > 0$ et $S > 0$: deux racines positives ; $P > 0$ et $S < 0$: deux racines négatives.
- **Équation paramétrique** : on étudie d'abord le cas où le coefficient de x^2 s'annule (équation du premier degré), puis le signe de Δ (ou Δ'), puis ceux de P et S . Une **relation indépendante** du paramètre s'obtient en éliminant m entre S et P .
- **Comparer un réel α aux racines** de $f(x) = ax^2 + bx + c$: si $af(\alpha) < 0$, alors $x' < \alpha < x''$; si $af(\alpha) > 0$ et $\Delta > 0$, α est à l'extérieur : $\alpha < x' < x''$ si $\alpha < \frac{S}{2}$, et $x' < x'' < \alpha$ si $\alpha > \frac{S}{2}$.
- **Équation bicarrée** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: on pose $X = x^2$ ($X \geq 0$). Plus généralement, on pose $X = x + \frac{1}{x}$, $X = x^2 + x$, etc.
- **Équations irrationnelles** : $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow (A = B \text{ et } A \geq 0)$; $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow (B \geq 0 \text{ et } A = B^2)$.
- **Inéquations irrationnelles** : $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow (A \geq 0, B > 0, A < B^2)$; $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow (A \geq 0 \text{ et } B < 0) \text{ ou } (B \geq 0 \text{ et } A > B^2)$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Équations du second degré et équations qui s'y ramènent

Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$

3) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

2) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

4) $\sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$

5) $13x^2 - 7x - 20 = 0$

8) $x + 1 = \frac{1}{x}$

6) $\frac{x^2 - x - 1}{x + 2} = 2x + 3$

9) $\frac{4x - 1}{x + 3} = \frac{8 - 5x}{5x - 1}$

7) $(2x + 3)(4x - 1) = 20x + 9$

10) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x + 5}{x + 3}$

Exercice 2 — Équations bicarrées et changements de variableRésous dans $\mathbb{R}$:

1) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

6) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$

2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3) $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$

7) $x^2 + 2 + \frac{8}{x^2 + 2} = 6$

4) $(x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$

5) $(x + 5)^4 - 6(x + 5)^2 - 7 = 0$

8) $(x^2 - 5x + 6)^2 - (2x^2 - 5x + 1)^2 = 0$

Exercice 3 — Somme et produit1) Sans résoudre, donne la somme et le produit des racines de : $10x^2 - 11x - 12 = 0$; $(x - 2)(3x - 4) = 13$; $7 + x = (2x - 1)(3x - 2)$; $x^2 = \sqrt{2}(3x - \sqrt{2})$.2) Forme l'équation du second degré de racines : -3 et 4 ; $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.3) Trouve, s'ils existent, deux nombres de somme S et de produit P : $S = 4, P = 3$; $S = -2, P = -35$; $S = 3\sqrt{2}, P = 4$; $S = 4, P = \frac{15}{4}$; $S = 2, P = 5$.**Exercice 4** — InéquationsRésous dans $\mathbb{R}$:

1) $-5x^2 + 3x - 2 > 0$

5) $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} \geq \frac{6}{5}$

2) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \geq 0$

6) $(x^2 + 3x + 5)^2 > 16$

3) $-x^2 + 4x + 5 > 0$

7) $(x - 5)(x^2 - 12x + 24) \geq 0$

4) $\frac{2x - 3}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$

8) $3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2}$

Exercice 5 — Équations et inéquations irrationnellesRésous dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x + 3} = x + 1$

5) $\sqrt{x + 3} < x + 1$

2) $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = x + 1$

6) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq x - 2$

3) $\sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt{2x + 4}$

7) $\sqrt{4 - x^2} > x - 2$

4) $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$

8) $\sqrt{x^2 - 1} \leq 2x + 1$

Exercice 6 — Équation paramétrique : étude complète

On considère $(E_m) : x^2 + 2(m-1)x + (m-1) = 0$.

- 1) Détermine m pour que 1 soit solution de (E_m) et déduis-en l'autre solution.
- 2) Détermine m pour que (E_m) ait deux solutions distinctes ; aucune solution ; une solution double.
- 3) Détermine m pour que (E_m) ait deux solutions de signes contraires.

Exercices d'approfondissement**Exercice 7** — Relations imposées entre les racines

- 1) Trouve k pour que les racines de $x^2 - (3k+1)x + 8 = 0$ vérifient $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
- 2) Trouve m pour que les racines de $x^2 + (m+1)x + m+2 = 0$ vérifient $2x_1 + 3x_2 = -13$.
- 3) Les racines de $x^2 - 5x + p = 0$ sont aussi solutions de $x^3 + qx + 30 = 0$. Trouve p et q .
- 4) Trouve k pour que les racines de $(k+1)x^2 - kx + k-4 = 0$ vérifient $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} = 30$.

Exercice 8 — Équation réciproque

Soit $(E) : x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

- 1) Vérifie que 0 n'est pas solution et que si x' est solution, alors $\frac{1}{x'}$ l'est aussi.
- 2) Divise par x^2 et montre que $X = x + \frac{1}{x}$ vérifie $X^2 - 4X + 3 = 0$.
- 3) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 9 — Comparer un nombre aux racines

Soit $(E) : (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m+2 = 0$.

- 1) Étudie, suivant m , l'existence et le signe des racines x' et x'' .
- 2) Établis une relation indépendante de m entre x' et x'' .
- 3) Détermine m pour que 2 soit solution et calcule alors l'autre racine.
- 4) Compare le nombre 3 aux racines de (E) suivant les valeurs de m .

Situations complexes**Situation complexe 3.1** Somme et produit · équation du second degré**La parcelle de l'Hippodrome****1 · Contexte**

La famille de Safiatou a acheté une parcelle rectangulaire au quartier de

l'Hippodrome à Bamako. Pour poser la clôture et commander le portail, il faut connaître la longueur et la largeur du terrain.

2 • Support

L'acte de vente indique seulement : aire de la parcelle 480 m^2 ; longueur de la diagonale 34 m. Le grillage coûte 2 500 F le mètre et le portail, de 4 m, est placé sur un petit côté.

3 • Fonction

Tu es le neveu de Safiatou. Tu dois calculer les dimensions et le budget de la clôture.

4 • Consignes

- ❶ Note L et ℓ les dimensions. Montre que $L^2 + \ell^2 = 1\,156$ et $L\ell = 480$, puis calcule $L + \ell$.
- ❷ Déduis-en L et ℓ en résolvant une équation du second degré.
- ❸ Calcule le coût du grillage nécessaire (portail exclu).

Situation complexe 3.2 Mise en équation · équation du second degré

L'excursion des élèves à Kangaba

1 • Contexte

Les élèves de la 11^e Sciences organisent une excursion à Kangaba. Le trésorier a perdu la liste des inscrits ; il ne se souvient que de deux montants.

2 • Support

Le groupe a payé au total 21 600 F pour les billets d'entrée d'un site. Le guide affirme : « Avec 30 participants de plus, chaque billet aurait coûté 20 F de moins et le groupe aurait payé 24 000 F au total. »

3 • Fonction

Tu es le délégué de la classe. Tu dois retrouver le nombre de participants et le prix d'un billet.

4 • Consignes

- ❶ Note n le nombre de participants et p le prix d'un billet. Traduis l'énoncé par un système.
- ❷ Montre que p est solution de $p^2 - 100p - 14\,400 = 0$ et résous cette équation.
- ❸ Donne le nombre de participants et le prix du billet ; vérifie les deux montants.

Exemples résolus

Exemple résolu — discussion d'une équation paramétrique

Énoncé. Étudie, suivant le réel m , l'existence et le signe des racines de (E) :
 $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m+2 = 0$.

1. Cas où l'équation est du premier degré

Si $m = 1$: (E) s'écrit $-4x + 3 = 0$, d'où l'unique solution $x = \frac{3}{4}$ (positive).

2. Discriminant, produit et somme (pour $m \neq 1$)

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(m+2) = m+3 ; \quad P = \frac{m+2}{m-1} ; \quad S = \frac{2(m+1)}{m-1}.$$

m	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
P		$+$	$+$	0	$-$	$+$
S		$+$	$+$	$+$	0	$+$

3. Conclusion

- $m < -3$: pas de racine ; $m = -3$: une racine double $x = \frac{m+1}{m-1} = \frac{1}{2}$;
- $-3 < m < -2$: deux racines positives ($P > 0$, $S > 0$) ; $m = -2$: $x' = 0$ et $x'' = S = \frac{2}{3}$;
- $-2 < m < 1$: deux racines de signes contraires ($P < 0$) ; $m = 1$: une seule racine $\frac{3}{4}$;
- $m > 1$: deux racines positives.

4. Relation indépendante de m

$$S = 2 + \frac{4}{m-1} \text{ et } P = 1 + \frac{3}{m-1}, \text{ donc } 3S - 4P = 2, \text{ soit } 3(x' + x'') - 4x'x'' = 2.$$

Exemple résolu — inéquation irrationnelle et lecture graphique

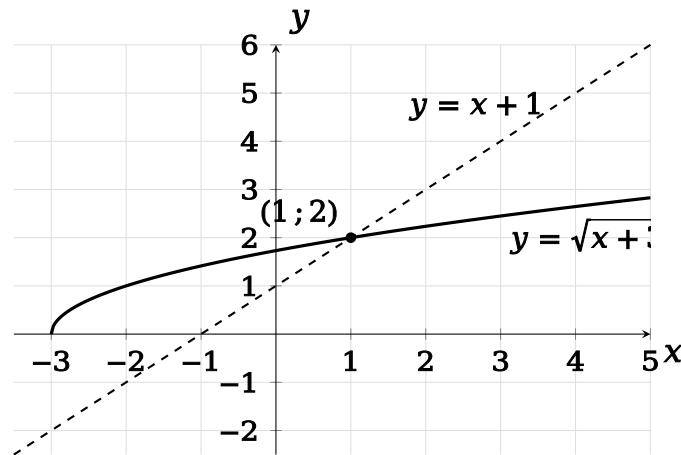
Énoncé. Résous $\sqrt{x+3} < x+1$, puis contrôle sur un graphique.

1. Conditions

Il faut $x+3 \geq 0$ et $x+1 > 0$, soit $x > -1$. Alors les deux membres sont positifs et l'inéquation équivaut à $x+3 < (x+1)^2$, c'est-à-dire $x^2 + x - 2 > 0$, soit $(x-1)(x+2) > 0$.

2. Conclusion

Avec $x > -1$, on obtient $x > 1$: $S =]1 ; +\infty[$.



La droite est au-dessus de la courbe exactement pour $x > 1$.

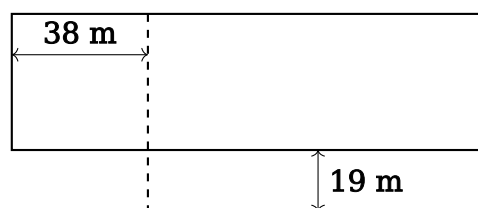
Exercices du recueil (repris et vérifiés)

Exercice 10 — Problèmes concrets

- 1) L'aire d'un terrain rectangulaire est de $1\,971\text{ m}^2$ et son périmètre de 200 m . Calcule sa longueur L et sa largeur ℓ .
- 2) Ali a un jardin rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur, et un champ rectangulaire dont l'aire est le double de celle du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du jardin augmenté de 44 m . L'aire du champ étant de 64 m^2 , calcule les dimensions du jardin puis celles du champ.
- 3) Un triangle rectangle a pour périmètre 30 m et pour aire 30 m^2 . Quelles sont ses dimensions ?
- 4) Une pelouse rectangulaire a une longueur double de sa largeur. Une allée de 3 m de large l'entoure et l'aire totale (pelouse et allée) est de 360 m^2 . Quelles sont les dimensions de la pelouse ?
- 5) Développe $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Trouve deux nombres dont la différence est 65 et la différence des cubes $647\,855$.

Exercice 11 — Le remembrement

Dans le cadre d'un remembrement, un cultivateur possède un champ rectangulaire de $6\,432\text{ m}^2$. Le nouveau tracé (en pointillés) retire une bande de 38 m sur la longueur et ajoute une bande de 19 m sur la largeur, sans perte de terrain.



Quelles sont les dimensions du champ avant et après le remembrement ?

Exercice 12 — Changements de variableRésous dans $\mathbb{R}$:

- 1) $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$ (dans le recueil, le terme $2(x^2 + x)$ était écrit au carré par erreur) ;
- 2) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 6 = 0$;
- 3) $\left(\frac{3-4x}{5}\right)^2 - 2(3-4x) + 25 = 0$;
- 4) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$ (pose $X = x^2 - 3x$) ;
- 5) $(x+1) - \sqrt{4x-15} = 4$.

Exercice 13 — Expressions symétriques des racines

Soit l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$, de solutions x_1 et x_2 , de somme S et de produit P . On pose $A = 3x_1^2 + x_1^3 + 3x_2^2 + x_2^3$ et $B = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

- 1) Exprime A et B en fonction de S et P .
- 2) Calcule A et B sans calculer x_1 et x_2 .

Exercice 14 — Équations paramétriques

- 1) Soit $x^2 - (2m+1)x + m - 2 = 0$. Démontre que, pour tout m , elle admet deux racines distinctes x_1, x_2 ; qu'il existe un unique m_0 tel que $x_1 + x_2 = x_1 x_2$; qu'il existe un unique m_1 tel que $|x_1 - x_2| = 3$.
- 2) Trouve une relation entre m et n pour que $(m+2n)x^2 - (m+2n)x + m - n = 0$ (avec $m+2n \neq 0$) admette une racine double.
- 3) Soit $x^2 + (k-2)x + k - 6 = 0$. Trouve les valeurs de k pour lesquelles elle a deux racines négatives.
- 4) Si x_1 est racine de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$, calcule $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$.

Exercice 15 — Relation indépendante et racine imposéeOn considère $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$.

- 1) Établis entre les racines x' et x'' une relation indépendante de m . Dédus-en x'' quand $x' = -2$, puis vérifie en calculant m .
- 2) Détermine m de façon que $5x' = -3x''$.

Exercice 16 — Une condition sur les racinesSoit $(E_m) : x^2 - 2(m+1)x + 3m + 1 = 0$.

- 1) Discute, suivant m , l'existence et le signe des racines x_1 et x_2 .
- 2) Détermine m pour que $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) - 2(x_1 + x_2)$.

Exercice 17 — Composition du premier trimestre — équation bicarrée paramétrique

m est un réel donné. On considère l'équation d'inconnue x : $x^4 - 3mx^2 + m^2 - 1 = 0$.

- 1) Résous cette équation dans $\mathbb{R}$ pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 3$.
- 2) Détermine les valeurs de m pour lesquelles cette équation a quatre solutions distinctes ; trois solutions distinctes ; deux solutions distinctes.

Exercice 18 — Systèmes

Résous dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 10 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13} \\ x + 2y + 3z = 174 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x^2 + 3xy - y - 7x = 13 \end{cases}$$

Remarque : dans le recueil, la seconde équation du système en $x^3 + y^3 = 152$ était mal recopiée ; avec $x^2 - xy + y^2 = 19$, on obtient $x + y = 8$.

Exercice 19 — Système paramétrique

On donne le système $\begin{cases} 3x + (m-1)y = 6 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$.

- 1) Trouve m pour que $(1 ; 2)$ soit solution.
- 2) Résous le système pour $m = 3$, puis pour $m = \frac{1}{3}$. Pour quelle valeur de m le système n'a-t-il pas une solution unique ?

Exercices complémentaires

Exercice 20 — Équations réciproques

- 1) Résous $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$ en divisant par x^2 et en posant $X = x + \frac{1}{x}$.
- 2) Résous $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ par la même méthode.

Exercice 21 — Inéquations rationnelles

Résous dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2 - x - 4}{2x^2 - x - 3} > 2 \quad \frac{2x - 8}{x^2 + 5x - 6} \leq \frac{1}{x + 2}$$
$$\frac{x + 1}{x} - \frac{2}{x + 1} \geq \frac{8}{x^2 + x}$$

Exercice 22 — Comparer un nombre aux racines

Soit $f_m(x) = (m - 2)x^2 - 2(m - 5)x + m - 15$.

- 1) Calcule Δ' et discute l'existence des racines. Résous $f_m(x) = 0$ pour $m = 2$.
- 2) Calcule $f_m(2)$ et $f_m(3)$. Détermine m pour que $2 < x' < 3 < x''$.
- 3) Existe-t-il m tel que $f_m(x) < 0$ pour tout réel x ?

Devoir de synthèse — Séquence 3

Équations et inéquations

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (7 points) — Équations et inéquationsRésous dans $\mathbb{R}$:

1) $(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$ et $(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 = 0$ (1,5 pt)

2) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ (1 pt)

3) $\frac{3x^2 + 1}{x + 4} \geq 2x$ (1,5 pt)

4) $\sqrt{-x + 5} \leq x - 3$ (1,5 pt)

5) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ et $x^4 + x^2 + 1 = 0$ (1,5 pt)

Exercice 2 (8 points) — Équation paramétriqueSoit $P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1$, où m est un réel.1) Calcule le discriminant de P et détermine les valeurs de m pour lesquelles P a deux racines α et β . (2 pt)2) Discute, suivant m , le signe des racines. (2 pt)3) Détermine m pour que $\alpha^2 + \beta^2 = 29$; calcule alors α et β . (2 pt)4) Détermine m pour que $|\alpha - \beta| = 1$; calcule alors α et β . (2 pt)**Exercice 3** (5 points) — Équation à paramètre factorisableSoit a un réel non nul et $(E_a) : ax^2 - (a^2 + 2)x + 2a = 0$.1) Montre que le discriminant de (E_a) est $(a^2 - 2)^2$. (2 pt)2) Dédus-en les solutions de (E_a) en fonction de a . Pour quelles valeurs de a y a-t-il une racine double ? (3 pt)

Séquence 4

Trigonométrie : angles orientés et formules

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Angles orientés et mesure principale ; cercle trigonométrique ; formules d'addition, de duplication, de linéarisation et de transformation (somme en produit) ; propriétés des fonctions trigonométriques (parité, périodicité).

L'essentiel à retenir

- Un angle orienté a une infinité de mesures, qui diffèrent d'un multiple de 2π : $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sa **mesure principale** est l'unique mesure dans $] -\pi ; \pi]$. Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$ $[2\pi]$. Conversion : $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.
- Angles associés : $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
- **Addition** : $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$; $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- **Duplication** : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$; $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$. **Linéarisation** : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.
- **Produit en somme** : $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$; $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$; $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.
- **Somme en produit** : $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$; $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$; $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$; $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$.
- $\cos$ est paire, $\sin$ et $\tan$ sont impaires ; $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques, $\tan$ est π -périodique. $x \mapsto \cos(ax + b)$ est $\frac{2\pi}{|a|}$ -périodique.
- Valeurs remarquables : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Mesures d'angles

- 1) Donne en radians : 30° , -45° , 70° , 135° ; et en degrés : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{4\pi}{3}$, $1,5\pi$.
- 2) Donne la mesure principale de : $\frac{21\pi}{2}$; $-\frac{19\pi}{6}$; $\frac{37\pi}{4}$; $-\frac{29\pi}{9}$; $\frac{100\pi}{3}$; $-\frac{47\pi}{8}$; $-\frac{43\pi}{6}$; $\frac{1873\pi}{2}$.
- 3) Détermine en degrés la mesure principale de l'angle de mesure $2\,187^\circ$, puis de $32\,578^\circ$.
- 4) Construis un cercle trigonométrique et place les points images de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{2011\pi}{2}$.

Exercice 2 — Angles associés

- 1) Calcule le sinus et le cosinus de $-\frac{17\pi}{4}$, $\frac{143\pi}{6}$ et $-\frac{97\pi}{3}$.
- 2) Simplifie, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x) \quad B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Exercice 3 — Formules d'addition

- 1) Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calcule $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.
- 2) Déduis-en $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos \frac{11\pi}{12}$, $\cos \frac{13\pi}{12}$, $\sin \frac{11\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
- 3) Simplifie $E(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin x$.

Exercice 4 — Duplication

- 1) À l'aide de $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$, démontre que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
- 2) Déduis-en $\cos \frac{3\pi}{8}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$, $\cos \frac{9\pi}{8}$ et $\tan \frac{5\pi}{8}$.
- 3) Exprime $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, puis montre que $\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$.

Exercice 5 — Transformation de sommes en produits

- 1) Factorise : $\sin 5x + \sin 3x$; $\sin x - \sin 5x$; $\cos 4x - \cos 6x$; $\cos 9x + \cos 3x$; $\sin 4x - \sin 2x$; $\cos 11x + \cos 3x$.
- 2) Démontre les identités : $\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$; $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$; $\frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan y$.
- 3) Montre que $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ et $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 6 — Parité et périodicité

Soit $f(x) = \sin 2x + \sin x$.

- 1) Étudie la parité de f et interprète graphiquement.
- 2) Montre que f est 2π -périodique. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier f ? Comment obtient-on le reste de la courbe ?

Exercices d'approfondissement**Exercice 7** — Valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$

On pose $P = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$ et $D = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$.

- 1) Multiplie P par $\sin \frac{\pi}{5}$ et utilise deux fois la formule de duplication pour montrer que $P = \frac{1}{4}$.
- 2) On note $c_1 = \cos \frac{\pi}{5}$ et $c_2 = \cos \frac{2\pi}{5}$. Justifie que $c_2 = 2c_1^2 - 1$ et $-c_1 = \cos \frac{4\pi}{5} = 2c_2^2 - 1$. En soustrayant ces égalités, montre que $c_1 + c_2 = 2(c_1^2 - c_2^2)$, puis que $D = \frac{1}{2}$.
- 3) Déduis-en $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Exercice 8 — Sommes de carrés

- 1) Calcule $A = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8}$.
- 2) On pose $B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$ et $C = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$. Calcule $B + C$ et $B - C$, puis B et C .
- 3) Montre que $E = \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$ est un entier naturel.

Exercice 9 — Un polynôme et des cosinus

Soit $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

- 1) Exprime $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$. Montre que si $\cos 3a = \frac{1}{2}$, alors $\cos a$ est racine de P .
- 2) Déduis-en que $\cos \frac{\pi}{9}$, $\cos \frac{7\pi}{9}$ et $\cos \frac{13\pi}{9}$ sont les racines de P , puis calcule leur produit et leur somme.

Situations complexes**Situation complexe 4.1** Formules d'addition · coordonnées d'un vecteur**La pirogue de Bamako à Koulikoro****1 · Contexte**

Un piroguier quitte le port de Bamako pour Koulikoro, à 60 km sur le fleuve Niger. Il se demande s'il arrivera avant la nuit, sachant qu'il dispose de 8 heures de jour.

2 · Support

Dans un repère orthonormé (axe des abscisses orienté vers l'est), la pirogue avance avec une vitesse propre $\vec{v}_p$ de 8 km/h dans la direction de l'angle 0. Le courant a une vitesse $\vec{v}_c$ de 4 km/h dans la direction de l'angle orienté $-\frac{5\pi}{12}$. On admet que la pirogue suit la direction de la vitesse résultante $\vec{v}_r = \vec{v}_p + \vec{v}_c$.

3 · Fonction

Tu es l'aide du piroguier. Tu dois estimer la durée du trajet.

4 · Consignes

- 1 Représente les deux vecteurs vitesse et donne les coordonnées de $\vec{v}_c$ en fonction de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
- 2 En écrivant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, calcule les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
- 3 Calcule les coordonnées exactes de $\vec{v}_r$, sa norme (arrondie au dixième) et dis si la pirogue atteindra Koulikoro en moins de 8 heures.

Situation complexe 4.2 Angles orientés · mesure principale · cosinus**Les panneaux solaires du lycée****1 · Contexte**

Le lycée installe des panneaux solaires sur son toit. À Bamako, l'angle d'élévation du soleil vaut 30° à 9 h, 45° à 10 h et 60° à 11 h. Le proviseur hésite entre deux inclinaisons des panneaux.

2 • Support

Option A : panneau incliné de $\frac{\pi}{3}$; option B : panneau incliné de $\frac{5\pi}{12}$. On admet qu'un panneau capte d'autant mieux que l'écart angulaire entre sa direction et celle du soleil est petit ; à midi, le soleil est à $\frac{\pi}{3}$.

3 • Fonction

Tu es membre du club scientifique. Tu dois conseiller le proviseur.

4 • Consignes

- ❶ Convertis en radians les trois angles d'élévation et donne leur cosinus et leur sinus.
- ❷ Calcule l'écart angulaire entre le soleil de midi et chaque option. Laquelle conseilles-tu ?
- ❸ Un troisième panneau est incliné de $\frac{\pi}{4}$. À quelle heure reçoit-il les rayons les plus proches de sa direction ? Calcule la mesure principale de l'angle entre la direction du soleil à 9 h et celle à 11 h.

Exemples résolus : cercle trigonométrique et courbes**Exemple résolu — mesure principale et point image**

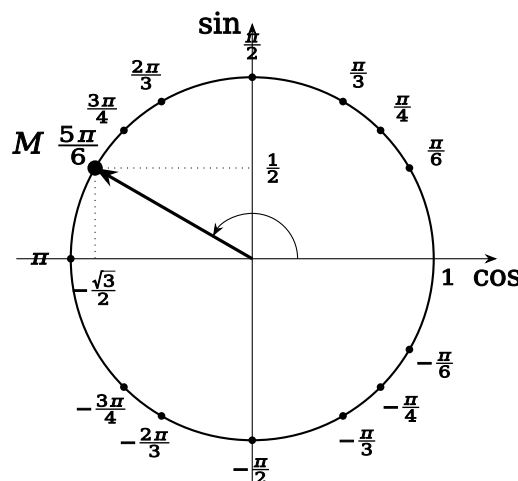
Énoncé. Détermine la mesure principale de $x = -\frac{43\pi}{6}$, quatre autres mesures de cet angle, et place son point image M sur le cercle trigonométrique.

1. Mesure principale

On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{43\pi}{6} + 2k\pi \in]-\pi; \pi]$. Comme $-\frac{43}{6} \approx -7,17$, on prend $k = 4$: $-\frac{43\pi}{6} + 8\pi = \frac{5\pi}{6}$. La mesure principale est $\frac{5\pi}{6}$.

2. Autres mesures

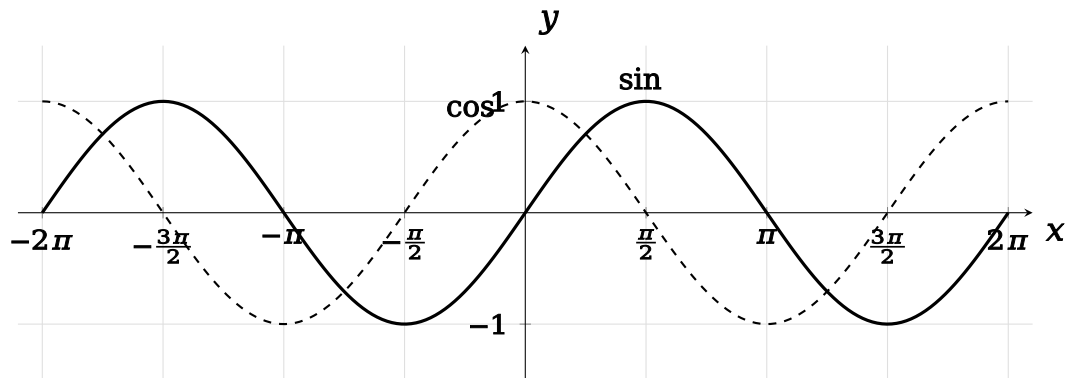
$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: par exemple $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{19\pi}{6}$.

3. Point image

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Exemple résolu — courbes de sinus et cosinus : parité et périodicité

Énoncé. Trace sur $[-2\pi ; 2\pi]$ les courbes de sin et cos et lis leurs propriétés.


Lecture

- La courbe de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (cos est paire) ; celle de sin est symétrique par rapport à l'origine (sin est impaire).
- Chaque courbe se reproduit par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$ (période 2π) : il suffit d'étudier ces fonctions sur $[0 ; \pi]$, puis d'utiliser la symétrie et la périodicité.
- La courbe de cos s'obtient à partir de celle de sin par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$, car $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercices du recueil (repris et vérifiés)
Exercice 10 — Angles orientés et constructions

- 1) Sur un cercle trigonométrique de centre O , avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$, place les points C, D, E, F, G, H, I, J tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{6}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{4}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = \frac{2\pi}{3}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = \pi$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}) = -\frac{3\pi}{4}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}) = -\frac{\pi}{6}$.
- 2) Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre A et B un point de $(\mathcal{C})$. Construis les points C, D, E, F de $(\mathcal{C})$ tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = -\frac{3\pi}{4}$. Détermine la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$, $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$.
- 3) Exprime en radians l'angle orienté (dans le sens trigonométrique) parcouru par l'aiguille des heures entre 12 h et 9 h, entre 6 h et 2 h, entre 4 h et 10 h ; donne chaque fois la mesure principale.

Exercice 11 — Coordonnées polaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Construis les points A, B, C de coordonnées polaires $\left[2; \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{3}{2}; -\frac{\pi}{4}\right], \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$ et calcule leurs coordonnées cartésiennes.
- 2) Construis $D(-2; -2), E(-3; 0)$ et $F(-\sqrt{3}; 1)$. Quelles sont leurs coordonnées polaires ?

Exercice 12 — Retrouver un angle

Détermine la mesure principale α (en radians) dans chacun des cas :

- | | |
|---|--|
| 1) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 5) $\cos \alpha = -1$ et $\sin \alpha = 0$ |
| 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ | 6) $\cos \alpha = 0$ et $\sin \alpha = -1$ |
| 3) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ | 7) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 4) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 8) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

Exercice 13 — Une identité vérifiée par Cauchy-Schwarz

Calcule $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $3 \sin x + 4 \cos x = 5$. (Indication : pose $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ et écris $3 \sin x + 4 \cos x = 5 \cos(x - \varphi)$.)

Exercice 14 — Formule de duplication par la géométrie

Sur un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1, on place un point M avec $\widehat{BOM} = \beta \in]0; \frac{\pi}{2}[$; on pose $\widehat{OAM} = \alpha$ et on note C le projeté orthogonal de M sur (AB) .

- 1) Montre que $\beta = 2\alpha$ et justifie que $\cos \alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{AM}{AB}$.
- 2) Montre que $AC = 1 + \cos 2\alpha$, exprime AM en fonction de $\cos \alpha$, puis démontre que $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
- 3) Application : calcule $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 15 — Sommes de cosinus d'angles en $\frac{\pi}{7}$

- 1) Démontre que pour tous réels a et b : $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.
- 2) Déduis-en que $2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$.
- 3) Démontre que $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Exercice 16 — Identités

Montre que, pour tout réel x où les expressions sont définies :

- 1) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$;
- 2) $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$;

$$3) \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2.$$

Remarque : l'identité 2 du recueil a été rétablie sous sa forme exacte.

Exercice 17 — Le pentagone régulier

($\mathcal{C}$) est le cercle trigonométrique de centre O . On place A, B, M sur ($\mathcal{C}$) tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{5}$; les droites (OB) et (AM) se coupent en N .

- 1) Calcule les angles des triangles OAM , OAN et OMN . Montre que OAN est isocèle en N et que OMN est isocèle en M ; déduis-en $MN = 1$.
- 2) On note K le milieu de $[AM]$ et L celui de $[OA]$. Montre que $AM = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ et $AN = \frac{1}{2 \cos \frac{2\pi}{5}}$.
- 3) En utilisant $AN - AM = MN = 1$, montre que $c = \cos \frac{2\pi}{5}$ vérifie $4c^2 + 2c - 1 = 0$; déduis-en $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
- 4) Déduis-en $\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, puis complète le tableau des $\cos \frac{k\pi}{5}$ pour $k = 1, \dots, 9$.

Remarque : dans le recueil, la seconde condition était notée $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ au lieu de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{5}$.

Exercices complémentaires

Exercice 18 — Lignes trigonométriques connues

- 1) Soit $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Calcule $\cos x$, $\tan x$, $\sin 2x$ et $\cos 2x$.
- 2) a et b sont deux angles aigus tels que $\cos a = \frac{4}{5}$ et $\sin b = \frac{5}{13}$. Calcule $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 19 — Linéarisation

- 1) Montre que $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$.
- 2) Montre que $\cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}$.
- 3) Montre que $\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x$.

Exercice 20 — Expressions symétriques

Simplifie, pour tout réel x :

$$A = \sin(x - \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(3\pi - x)$$

$$B = \cos(5\pi + x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$$

Devoir de synthèse — Séquence 4

Trigonométrie : angles orientés et formules

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Mesures d'angles et angles associés

- 1) On considère un angle orienté de mesure $x = -\frac{43\pi}{6}$. Détermine quatre autres mesures, sa mesure principale, et place son point image sur le cercle trigonométrique. (2 pt)
- 2) Détermine en degrés la mesure principale de l'angle de mesure 2187° . (1 pt)
- 3) Calcule le sinus et le cosinus de $-\frac{17\pi}{4}$, $\frac{143\pi}{6}$ et $-\frac{97\pi}{3}$. (1,5 pt)
- 4) Simplifie $C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$. (1,5 pt)

Exercice 2 (8 points) — Valeurs exactes

- 1) Démontre que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Déduis-en $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$. (3 pt)
- 2) On donne $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$ et $B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$. Calcule $A + B$ puis $A - B$ et déduis-en les valeurs exactes de A et B . (3 pt)
- 3) Démontre que $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ (multiplie par $2 \sin \frac{\pi}{7}$). (2 pt)

Exercice 3 (6 points) — Formules de transformation

- 1) Exprime $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$. (2 pt)
- 2) Déduis-en que $\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$. (2 pt)
- 3) Factorise $f(x) = \sin 3x + \sin x + 2 \sin 2x$ (montre que $f(x) = 4 \sin 2x \cos^2 \frac{x}{2}$). (2 pt)

Séquence 5

Équations et inéquations trigonométriques

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Équations $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$; équations $a \cos x + b \sin x + c = 0$; équations se ramenant au second degré par changement de variable ; inéquations $\cos x < a$, $\sin x < a$; représentation des solutions sur le cercle trigonométrique.

L'essentiel à retenir

- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ (avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).
- Si $|a| > 1$, les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'ont pas de solution.
- **Équation** $a \cos x + b \sin x = c$: on pose $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et on cherche φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$. L'équation devient $r \cos(x - \varphi) = c$; elle a des solutions si et seulement si $|c| \leq r$.
- **Changement de variable** : $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ se résout en posant $X = \cos x$ avec $X \in [-1; 1]$; $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ permet de se ramener à une seule fonction.
- **Factorisation** : on transforme une somme en produit, puis on utilise « un produit est nul si l'un des facteurs est nul ».
- **Inéquations** : on résout d'abord l'équation associée, puis on lit les solutions sur le cercle trigonométrique (arc où l'abscisse, ou l'ordonnée, convient) sur un intervalle de longueur 2π ; on ajoute ensuite $2k\pi$. Exemple : $\cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Équations fondamentales

Résous dans $\mathbb{R}$, puis place les images des solutions sur le cercle :

1) $\sin x = 0$; $\sin x = 1$

2) $\cos x = -1$; $\cos x = 0$

3) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$

5) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $2 \cos x - 1 = 0$

7) $\tan x = 0$; $\tan 2x = \sqrt{3}$

8) $\cos \frac{x}{2} = 0$

9) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$

Exercice 2 — Équations du type $\cos u = \cos v$, $\sin u = \sin v$ Résous dans $\mathbb{R}$, puis donne les solutions appartenant à $] -\pi ; \pi]$:

$$\sin 2x = \sin 3x \quad \sin 2x = \cos 3x \quad \cos 3x = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin x \quad \cos 2x = \cos^2 x$$

Exercice 3 — Équations $a \cos x + b \sin x = c$ Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\cos x + \sin x = 1$

5) $\cos x + \sin x = -1$

2) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{3}$

6) $\cos x + \sin x = 2$

3) $\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 1$

7) $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = -1$

4) $-\sin x + \sqrt{3} \cos x - 1 = 0$

8) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

Exercice 4 — Changement de variable

Résous :

1) dans $\mathbb{R}$: $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$; $\cos 2x - 4 \cos x + 3 = 0$;

2) dans $[0 ; 2\pi]$: $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$;

3) dans $[-2\pi ; 2\pi]$: $\sin^2(2x) - 4 \sin 2x + 3 = 0$.

Exercice 5 — Inéquations

1) Résous $\sin x > -\frac{1}{2}$ dans $] -\pi ; \pi]$, puis dans $[0 ; 2\pi[$, puis dans $\mathbb{R}$.

2) Résous dans $[0 ; 2\pi[$: $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) Résous dans $[0 ; \pi[$: $\tan x \geq \sqrt{3}$.

4) Résous dans $\mathbb{R}$: $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 1$ et $\sqrt{3} \cos x + \sin x \geq 1$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Factoriser pour résoudre

1) Résous dans $\mathbb{R}$: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ (regroupe $\sin x + \sin 3x$).

2) Résous dans $\mathbb{R}$: $\cos 5x - \cos x = \sin 3x$.

3) Écris $A(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$ sous la forme $4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2}$; résous $A(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0 ; 2\pi]$ et représente les solutions.

4) Résous dans $\mathbb{R}$: $2 \cos 2x \sin x = \sqrt{3} \sin x$.

Exercice 7 — Équations à coefficients irrationnels

- 1) Vérifie que $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$, puis résous dans $\mathbb{R}$: $-4 \sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos x + 4 - \sqrt{3} = 0$.
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$: $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{6} \leq 0$ (factorise le premier membre).

Exercice 8 — Systèmes trigonométriques

- 1) Résous dans $[0; 2\pi]^2$ le système $x - y = \frac{\pi}{4}$, $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (transforme le produit en somme).
- 2) Résous dans $[0; \pi]^2$ le système $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, $\cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Situations complexes**Situation complexe 5.1** Fonction cosinus · période · inéquation**La file d'attente à la station-service****1 · Contexte**

À cause de la pénurie de carburant, les files d'attente devant les stations-service de Bamako sont fréquentes. Un observateur remarque que la longueur de la file varie de façon régulière au fil de la semaine, en fonction des livraisons.

2 · Support

La longueur de la file (en mètres) est modélisée par $L(t) = 15 + 10 \cos\left(\frac{2\pi}{7}(t - 1)\right)$ pour $t \in [0; 7]$, où t est le temps en jours ($t = 0$: dimanche à minuit ; $t = 1$: lundi à minuit, etc.).

3 · Fonction

Tu es chauffeur de taxi. Tu veux savoir quand aller faire le plein.

4 · Consignes

- 1 Quelle est la période de L ? Interprète. Quand la file est-elle la plus longue ? la plus courte ? Donne ces longueurs.
- 2 Résous $L(t) \geq 20$ et dis quels jours il vaut mieux éviter la station.
- 3 La police n'autorise pas plus de 12 m de file. Résous $L(t) \leq 12$ (arrondis au centième de jour).

Situation complexe 5.2 Équation $a \cos x + b \sin x = c$ **La rampe d'accès du centre de santé****1 · Contexte**

Le centre de santé communautaire d'un quartier de Sikasso construit une rampe

pour les fauteuils roulants. La rampe s'appuie sur un mur et sur un poteau ; son inclinaison x (en radians) doit être choisie avec soin.

2 · Support

Les contraintes du chantier imposent que l'inclinaison $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ vérifie $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour qu'un fauteuil roulant monte sans danger, l'inclinaison ne doit pas dépasser $\frac{\pi}{12}$ (soit 15°).

3 · Fonction

Tu es stagiaire au bureau d'études. Tu dois vérifier que la rampe est accessible.

4 · Consignes

- ❶ Écris $\cos x - \sin x$ sous la forme $r \cos(x - \varphi)$.
- ❷ Résous l'équation dans $\mathbb{R}$, puis dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.
- ❸ Conclut : la rampe est-elle accessible aux fauteuils roulants ? Donne l'inclinaison en degrés.

Exemples résolus

Exemple résolu — équation $a \cos x + b \sin x = c$ et solutions dans un intervalle

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = -1$, puis donne les solutions appartenant à $]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$.

1. Transformation

$$r = \sqrt{1+3} = 2 \text{ et } \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

2. Résolution

$$(E) \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ d'où } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. Solutions dans $]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi : -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ (car } -\frac{3\pi}{2} \text{ est exclu)} ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi : -\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

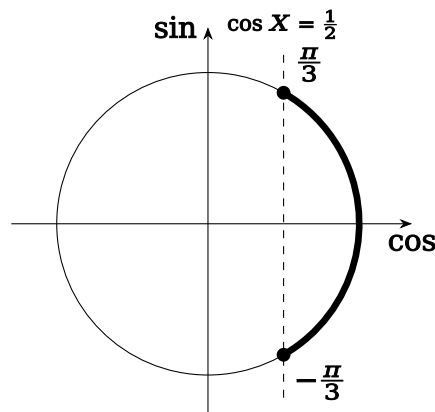
Exemple résolu — inéquation lue sur le cercle trigonométrique

Énoncé. Résous dans $] -\pi; \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{3} \cos x + \sin x \geq 1$.

1. Transformation

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right), \text{ donc l'inéquation équivaut à } \cos X \geq \frac{1}{2} \text{ avec } X = x - \frac{\pi}{6}.$$

2. Lecture sur le cercle



L'arc en trait épais correspond à $\cos X \geq \frac{1}{2} : X \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

3. Retour à x

$x = X + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. Dans $] -\pi; \pi] : S = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercices du recueil (repris et vérifiés)

Exercice 9 — Composition du deuxième trimestre — une fonction trigonométrique

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x$.

- 1) Montre que $f(x) = \sin 2x \sin 3x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Résous dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) > 0$.
- 3) Montre que $f\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}$.

Exercice 10 — Équations variées

Résous dans l'ensemble indiqué :

- 1) dans $[0; 2\pi]$: $\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$;
- 2) dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2} \cos 3x - \sqrt{6} \sin 3x = \sqrt{2}$, puis donne les solutions appartenant à $[-\pi; \pi]$;
- 3) dans $\mathbb{R}$: $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$ (écris $3 = 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$) ;
- 4) dans $\mathbb{R}$: $\cos 3x \cos x = \sin 3x \sin x$ et $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \frac{1}{2}$;
- 5) dans $\mathbb{R}$: $\cos 2x = \cos^2 x$ et $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$;
- 6) dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

Exercice 11 — Inéquations

Résous :

- 1) dans $[0; 2\pi]$: $\cos 2x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (représente les solutions sur le cercle) ;
- 2) dans $\mathbb{R}$: $\sin \frac{x}{3} \geq \sin \frac{3\pi}{4}$;

- 3) dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: $\sin 3x + 1 - \cos 2x - \sin x > 0$ (montre que le premier membre vaut $2 \sin x (\cos 2x + \sin x)$, puis factorise $\cos 2x + \sin x = 1 - 2 \sin^2 x + \sin x$).

Exercice 12 — Calculer un angle à partir d'un sinus ou d'une tangente

- 1) Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Calcule $\cos 2x$, puis détermine x .
- 2) On pose $\tan x = \sqrt{2} - 1$ avec $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Calcule $\tan 2x$, puis détermine x .

Exercice 13 — Devoir surveillé — équations et inéquations

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$: $\cos x = \frac{1}{2}$; $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 1$; $\cos 2x = \cos^2 x$; $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$; $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{3}$.
- 2) Résous dans $[0; 2\pi[$: $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; dans $[0; \pi[$: $\tan x \geq \sqrt{3}$; dans $\mathbb{R}$: $2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \geq 1$.

Exercice 14 — Évaluation collaborative — équation et inéquation

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2} \cos 3x - \sqrt{6} \sin 3x = \sqrt{2}$.
- 2) Donne l'ensemble des solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi; \frac{5\pi}{3}]$.
- 3) Résous dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\cos 2x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 15 — Les cases bambara

Les cases traditionnelles bambara ont souvent un toit conique dont la section verticale est un triangle isocèle d'angle au sommet $\frac{2\pi}{5}$.

- 1) Démontre que, pour tout réel x : $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{5}) + \cos(x + \frac{4\pi}{5}) + \cos(x + \frac{6\pi}{5}) + \cos(x + \frac{8\pi}{5}) = 0$ (multiplie par $2 \sin \frac{\pi}{5}$ et transforme chaque produit en somme).
- 2) En prenant $x = 0$, déduis-en que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.
- 3) Sachant que $\cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1$, détermine la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Exercices complémentaires

Exercice 16 — Équations en $\cos x$ et $\sin x$

Résous dans $\mathbb{R}$:

- 1) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $4 \cos^2 x - 3 = 0$;
- 2) $\cos 2x + \cos x = 0$ (transforme en produit) ; $\sin 3x = \cos 2x$;
- 3) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1$.

Exercice 17 — Inéquations en $\cos x$ Résous dans $[0; 2\pi[$:

1) $2 \cos x + \sqrt{3} < 0$; $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$ (factorise en $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$).

Exercice 18 — SystèmeRésous dans $[0; \pi]^2$: $x + y = \frac{2\pi}{3}$ et $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (transforme la somme en produit).

Devoir de synthèse — Séquence 5

Équations et inéquations trigonométriques

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (8 points) — ÉquationsRésous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1,5 pt)
- 2) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{3}$ (2 pt)
- 3) $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$ (2 pt)
- 4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ (2,5 pt)

Exercice 2 (6 points) — Inéquations

- 1) Résous dans $] -\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$. (2 pt)
- 2) Résous dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et représente les solutions sur le cercle trigonométrique. (2 pt)
- 3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{3} \cos x + \sin x \geq 1$. (2 pt)

Exercice 3 (6 points) — SystèmeOn considère le système (S) : $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ avec $(x ; y) \in [0 ; 2\pi]^2$.

- 1) Montre que (S) équivaut à $x - y = \frac{\pi}{4}$ et $\cos(x + y) = 0$. (2 pt)
- 2) Résous (S). (4 pt)

Séquence 6

Limites et continuité

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Limite nulle en zéro ; limite d'une fonction en un point, limite à droite et à gauche ; limites à l'infini ; formes indéterminées ; continuité en un point, à droite, à gauche ; prolongement par continuité ; théorème de la bijection (admis).

L'essentiel à retenir

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - L) = 0$. Si la limite existe, elle est unique. f a une limite en x_0 si et seulement si ses limites à gauche et à droite existent et sont égales.
- Limites de référence : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Les théorèmes sur les sommes, produits et quotients s'appliquent, sauf dans les **formes indéterminées** : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $(+\infty) + (-\infty)$.
- Pour lever une indétermination : factoriser (par $x - x_0$ ou par le terme de plus haut degré), simplifier, utiliser l'**expression conjuguée** $\sqrt{A} - B \rightarrow \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$, ou se ramener aux limites de référence.
- En $\pm\infty$, un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré ; une fonction rationnelle a la limite du quotient des termes de plus haut degré.
- f est **continue en** x_0 si $f(x_0)$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sin$, $\cos$, $\sqrt{}$ sont continues sur leur ensemble de définition.
- Si $x_0 \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ (réel), f est **prolongeable par continuité** en x_0 : $g(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$, $g(x_0) = \ell$.
- **Théorème de la bijection** : si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors f est une bijection de $[a; b]$ sur l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Limites en un point

Calcule :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} \\ & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x - 1} \end{aligned}$$

Exercice 2 — Limites trigonométriques

Calcule :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \end{aligned}$$

Exercice 3 — Limites à l'infiniCalcule les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

$$f_1(x) = -x^3 + 2x^2 + 5 \quad f_2(x) = \frac{3x + 5}{6x - 4}$$

$$f_3(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^3 - 4} \quad f_4(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3x - 6}$$

et la limite en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.**Exercice 4** — Limite à gauche, limite à droite

- 1) Soit $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 1$. f admet-elle une limite en 1 ?
- 2) Soit $f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 + x - 2}$. Détermine D_f et calcule les limites à gauche et à droite en 1.
- 3) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{x - 2}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{x - 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2}$.

Exercice 5 — Continuité et prolongement

- 1) Soit $f(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 5$. f est-elle continue en 0 ?
- 2) Quelle valeur faut-il donner à m pour que $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = m$ soit continue en 0 ?
- 3) Détermine n pour que $g(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ($x \neq 0$), $g(0) = n$ soit continue en 0.

4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Et $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en 0 ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Fonction définie par morceaux

Soit $f(x) = x^2 - 5$ si $x \leq 3$ et $f(x) = \sqrt{x + 13}$ si $x > 3$. Étudie la continuité de f en 3, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 — Paramètres et continuité

Soit f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ si $x > 0$ et $f(x) = ax + b$ si $x \leq 0$. Détermine b pour que f soit continue en 0. Peut-on choisir a pour que la courbe « ne fasse pas d'angle » en 0 ? (Compare avec le nombre dérivé à droite, séquence 7.)

Exercice 8 — Théorème de la bijection

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0; 1]$.

- 1) Justifie que f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ et que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0; 1]$.
- 2) Par balayage à la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Situations complexes

Situation complexe 6.1 Prolongement par continuité

La rupture collective du Ramadan

1 • Contexte

Les élèves de la 11^e Sciences organisent une rupture collective dans la cour du lycée pendant le mois de Ramadan. Une application mobile calcule le budget du repas en fonction du nombre de participants.

2 • Support

L'application calcule le budget total (en FCFA) pour x participants avec la formule $f(x) = \frac{5\,000(x^2 - 100)}{x - 10}$, définie sur $]0; +\infty[\setminus \{10\}$. Elle « plante » quand il y a exactement 10 participants (division par zéro).

3 • Fonction

Tu es le responsable informatique de la classe. Tu dois corriger l'application.

4 • Consignes

- 1 Calcule le budget pour 5 et pour 20 participants. Calcule $\lim_{x \rightarrow 10} f(x)$.
- 2 Montre que f est prolongeable par continuité en 10 ; quelle valeur l'application doit-elle afficher pour 10 participants ? Montre que le prolonge-

ment g est une fonction affine.

- ③ La contribution par participant est $c(x) = \frac{g(x)}{x}$. Augmente-t-elle ou diminue-t-elle quand le nombre de participants augmente ? Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x)$ et interprète.

Situation complexe 6.2 Continuité d'une fonction par morceaux

Le tarif des colis à la gare routière de Sogoniko

1 - Contexte

Une compagnie de transport de la gare routière de Sogoniko envoie des colis vers Mopti. Les clients se plaignent : un colis de 10,1 kg coûte beaucoup plus cher qu'un colis de 10 kg.

2 - Support

Le tarif actuel (en FCFA) pour un colis de x kg est : $T(x) = 500x$ si $0 < x \leq 10$ et $T(x) = 600x + 1\,000$ si $x > 10$. Le directeur veut un nouveau tarif $T_a(x) = 500x$ si $0 < x \leq 10$ et $T_a(x) = ax + 1\,000$ si $x > 10$, sans « saut » de prix.

3 - Fonction

Tu es le comptable de la compagnie. Tu dois proposer un tarif juste.

4 - Consignes

- ① Calcule $T(10)$ et $\lim_{x \rightarrow 10^+} T(x)$. T est-elle continue en 10 ? Explique la plainte des clients.
- ② Détermine a pour que T_a soit continue en 10.
- ③ Avec ce nouveau tarif, calcule le prix d'un colis de 25 kg et la masse d'un colis facturé 13 000 F.

Exemples résolus

Exemple résolu — limites à gauche et à droite, prolongement impossible

Énoncé. Soit $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2+x-2}$ et g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 1$, $g(1) = \frac{1}{3}$. Détermine D_f , étudie les limites de f en 1 et dis si g est un prolongement continu de f en 1.

1. Ensemble de définition et simplification

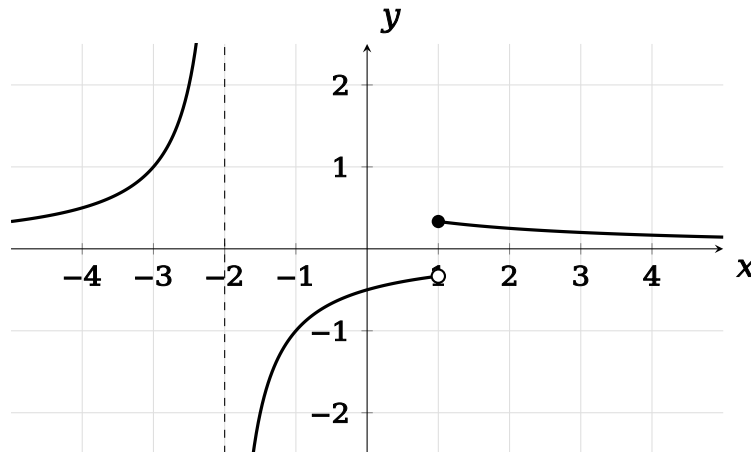
$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Pour $x > 1$: $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$; pour $x < 1$, $x \neq -2$: $f(x) = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{x+2}$.

2. Limites en 1

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{1}{3}$. Les limites à gauche et à droite sont différentes : f n'a pas de limite en 1.

3. Conclusion

g est continue à droite en 1 (car $g(1) = \frac{1}{3}$), mais pas à gauche : g n'est pas un prolongement continu de f en 1. La courbe présente un « saut » :

**Exemple résolu — expression conjuguée et prolongement par continuité**

Énoncé. Soit $h(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2}$. Détermine D_h et le réel k tel que la fonction égale à h pour $x \neq 2$ et à k en 2 soit continue en 2.

1. Ensemble de définition

Il faut $2x + 5 \geq 0$ et $x \neq 2$: $D_h = \left[-\frac{5}{2}; 2[\cup]2; +\infty[$.

2. Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et conjugué

$$\text{Pour } x \in D_h : h(x) = \frac{(3 - \sqrt{2x+5})(3 + \sqrt{2x+5})}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \frac{9 - (2x+5)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}}.$$

3. Limite et conclusion

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}. \text{ Il faut donc } k = -\frac{1}{3}.$$

Exercices du recueil (repris et vérifiés)**Exercice 9** — Composition du deuxième trimestre — limites

Calcule :

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Indications : pour a), factorise par $(x + 1)^2$; pour b), écris $\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x}$; pour c), multiplie par les deux expressions conjuguées.

Exercice 10 — Devoir surveillé — limites, continuité, dérivabilité

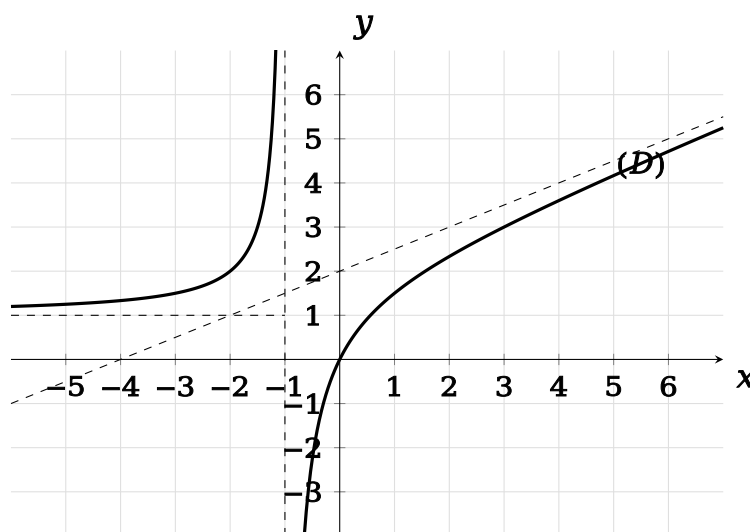
- 1) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2 + 5)$; $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$.
- 2) a) Quelle valeur faut-il donner à m pour que $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = m$ soit continue en 0 ? b) Détermine n pour que $g(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ si $x \neq 0$, $g(0) = n$ soit continue en 0. c) Détermine k pour que $h(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2}$ si $x \neq 2$, $h(2) = k$ soit continue en 2.

Exercice 11 — Fonctions de référence et limites

- 1) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3x - 6}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3x - 6}$ (pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$).
- 2) Soit $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1}$. Détermine D_f et calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 3) Soit $f(x) = \frac{x-2}{2x}$. f est-elle continue en 1 ? en 0 ? Même question en 2 pour $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

Exercice 12 — Lecture graphique de limites

La courbe (C_f) ci-dessous admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale, la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote en $-\infty$ et la droite $(D) : y = \frac{1}{2}x + 2$ comme asymptote en $+\infty$. Elle passe par O .



À partir du graphique, détermine :

- 1) l'ensemble de définition D_f ;
- 2) les limites de f aux bornes de D_f ;
- 3) une équation de chacune des asymptotes ;
- 4) le tableau de variations de f et le signe de $f(x)$.

Remarque : la courbe du recueil, peu lisible, a été redessinée à partir de la fonction $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ pour $x < -1$ et $f(x) = \frac{x}{2} + 2 - \frac{2}{x+1}$ pour $x > -1$.

Exercices complémentaires

Exercice 13 — Limites variées

Calcule :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 3}$$

Exercice 14 — Continuité et valeur absolue

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ pour $x \neq 1$.

- 1) Écris $f(x)$ sans valeur absolue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.
- 2) Calcule les limites à gauche et à droite en 1. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 15 — Encadrement et limite

- 1) Montre que pour tout $x \neq 0$: $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$. Déduis-en $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.
- 2) La fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est-elle continue en 0 ?

Devoir de synthèse — Séquence 6

Limites et continuité

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (9 points) — Calculs de limites

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x + 1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{1 - 4x^2}$ (1,5 pt)

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ (1,5 pt)

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$ (1,5 pt)

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ (2 pt)

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ (1,5 pt)

6) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + 1}{x - 3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 1}{x - 3}$ (1 pt)

Exercice 2 (6 points) — Continuité et prolongement

1) Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$. Montre que f est prolongeable par continuité en 1 et donne son prolongement. (2 pt)

2) Soit g définie par $g(x) = \frac{x^2 + ax - 6}{x - 2}$ si $x \neq 2$ et $g(2) = b$. Détermine a et b pour que g soit continue en 2. (4 pt)

Exercice 3 (5 points) — Fonction définie par morceauxSoit f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ si $x < 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = \sqrt{x + 4} - 2$ si $x > 0$.

1) Étudie la continuité de f à gauche et à droite en 0. f est-elle continue en 0 ? (3 pt)

2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (pour la seconde, encadre $1 - \cos x$). (2 pt)

Séquence 7

Dérivation

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonction dérivable en un point, nombre dérivé, nombre dérivé à droite et à gauche ; interprétation géométrique : tangente ; fonction dérivée ; dérivées successives ; sens de variation d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

L'essentiel à retenir

- f est **dérivable** en x_0 si $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (ou $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) a une limite finie quand $h \rightarrow 0$; cette limite est le **nombre dérivé** $f'(x_0)$. Nombres dérivés à droite $f'_d(x_0)$ et à gauche $f'_g(x_0)$: f est dérivable en x_0 si et seulement s'ils existent et sont égaux. S'ils sont différents, la courbe a un **point anguleux** (deux demi-tangentes).
- **Tangente** au point d'abscisse x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Si $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale.
- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 (la réciproque est fautive : $x \mapsto |x|$ en 0).
- Dérivées usuelles : $(k)' = 0$; $(x^n)' = nx^{n-1}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) ; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Opérations : $(u+v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Homographique : $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- **Dérivées successives** : $f'' = (f')'$, $f^{(3)} = (f'')'$, ...
- **Théorème** : si f est dérivable sur un intervalle I et $f' > 0$ sur I (sauf en des points isolés où $f' = 0$), alors f est strictement croissante sur I ; si $f' < 0$, strictement décroissante ; si $f' = 0$ sur I , constante. Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 , f admet un **extremum relatif** en x_0 .

Exercices d'application**Exercice 1** — Nombre dérivé par la définition

Utilise la définition pour étudier la dérivabilité et donner le nombre dérivé :

- 1) $f(x) = x^2 - 3x$ en $x_0 = 2$; $g(x) = \frac{1}{x+1}$ en $x_0 = 1$; $h(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$;
- 2) $k(x) = \sqrt{x}$ en 0 (à droite) ; $u(x) = |x-1|$ en 1 ; interprète graphiquement.

Exercice 2 — Calculs de dérivées

Calcule la dérivée de chaque fonction sur un intervalle où elle est dérivable :

1) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$

5) $f_5(x) = (3x^2 - 1)^4$

2) $f_2(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$

6) $f_6(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

3) $f_3(x) = \frac{2x + 4}{-x + 1}$

7) $f_7(x) = \sin(3x) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

4) $f_4(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

8) $f_8(x) = \sin^2 x + \tan x$

Exercice 3 — Tangentes

- 1) Donne une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ au point d'abscisse 2.
- 2) Donne une équation de la tangente à la courbe de $r(x) = \sin x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
- 3) Soit $q(x) = \tan x$. Calcule $q'(x)$ et montre que $q'(x) = 1 + \tan^2 x$; donne la tangente en 0.

Exercice 4 — Tangentes à une hyperbole

Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Donne une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -2 .
- 2) Existe-t-il un point de $(\mathcal{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur -5 ?
- 3) Détermine les points de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite $y = 3x - 4$; vérifie qu'ils sont symétriques par rapport à $S\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- 4) Étudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(D) : y = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 — Dérivées successives

- 1) Calcule f' , f'' , $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$ pour $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 5$.
- 2) Pour $g(x) = \sin x$, calcule g' , g'' , $g^{(3)}$, $g^{(4)}$ et conjecture $g^{(n)}(x)$.
- 3) Pour $h(x) = \frac{1}{x}$, calcule h' , h'' , $h^{(3)}$.

Exercice 6 — Sens de variation

Étudie le sens de variation de chaque fonction et dresse son tableau de variations :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad g(x) = \frac{2x + 4}{-x + 1} \quad h(x) = x + \frac{4}{x}$$

$$k(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

Exercices d'approfondissement

Exercice 7 — Point anguleux

Soit $f(x) = |x^2 - 2x| + 1$.

- 1) Écris $f(x)$ sans valeur absolue.
- 2) Étudie la dérivabilité de f en 0 et en 2 ; interprète graphiquement (demi-tangentes).
- 3) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variations complet.

Exercice 8 — Démonstration : sens de variation et signe de la dérivée

- 1) Soit f dérivable sur I et croissante. Montre que pour $x_0 \in I$ et $h \neq 0$, $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$, et déduis-en $f'(x_0) \geq 0$.
- 2) On admet la réciproque (si $f' > 0$ sur I , f est strictement croissante). Utilise-la pour montrer que pour tout $x > 0$, $\sin x < x$ (étudie $u(x) = x - \sin x$).

Exercice 9 — Approximation affine

- 1) Montre que pour h proche de 0, $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$. Déduis-en une valeur approchée de $\sqrt{1,02}$ et de $\sqrt{0,98}$.
- 2) De même, donne une approximation affine de $(1+h)^3$ et de $\frac{1}{1+h}$; calcule $1,001^3$ et $\frac{1}{0,998}$ à 10^{-4} près.

Situations complexes

Situation complexe 7.1 Dérivée · tangente · vitesse instantanée

La moto-taxi de Kati

1 · Contexte

Une moto-taxi quitte la gare de Kati et roule en ligne droite sur la route de Bamako. Un policier veut savoir si le conducteur a dépassé la vitesse autorisée de 60 km/h.

2 · Support

La distance parcourue (en km) au bout de t heures est $d(t) = -40t^3 + 60t^2$ pour $t \in [0 ; 1]$. La vitesse instantanée est la dérivée $d'(t)$ (en km/h).

3 · Fonction

Tu es élève stagiaire au commissariat. Tu dois analyser le trajet.

4 · Consignes

- 1 Calcule la distance totale parcourue en une heure et la vitesse moyenne.

- 2 Calcule $d'(t)$; à quel instant la vitesse est-elle maximale ? Quelle est cette vitesse ?
- 3 Pendant quelle durée le conducteur a-t-il dépassé 20 km/h ? A-t-il dépassé 60 km/h ?

Situation complexe 7.2 Dérivée · coût marginal · bénéfice maximal

L'atelier de fabrication de foyers améliorés

1 · Contexte

Un atelier de Sikasso fabrique des foyers améliorés qui consomment moins de bois. Le gérant veut fixer le nombre de foyers à produire chaque semaine.

2 · Support

Le coût de production de x foyers est $C(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 200$ (en milliers de FCFA), pour $x \in [0; 12]$. Chaque foyer est vendu 300 000 F, et toute la production est vendue. Le coût marginal est $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

3 · Fonction

Tu es le comptable de l'atelier. Tu dois conseiller le gérant.

4 · Consignes

- 1 Calcule $C'(x)$ et étudie le sens de variation de C . Calcule $C_m(x)$ et compare-le à $C'(x)$.
- 2 Exprime le bénéfice $B(x)$ (en milliers de FCFA) et étudie ses variations sur $[0; 12]$.
- 3 Combien de foyers faut-il produire pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Exemples résolus

Exemple résolu — dérivabilité, points anguleux et tableau de variations

Énoncé. Soit $f(x) = |x^2 - 2x| + 1$. Étudie la dérivabilité de f en 0 et en 2, puis ses variations, et trace sa courbe.

1. Expression sans valeur absolue

$x^2 - 2x = x(x - 2)$ est positif à l'extérieur de $[0; 2]$. Donc $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 2$, et $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ si $0 \leq x \leq 2$.

2. Dérivabilité en 0 et en 2

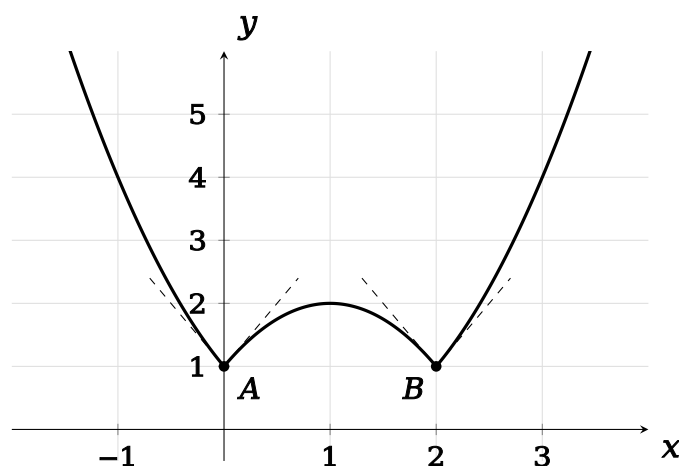
En 0 : à gauche $f'_g(0) = 2 \times 0 - 2 = -2$; à droite $f'_d(0) = -2 \times 0 + 2 = 2$. Ces nombres sont différents : f n'est pas dérivable en 0 ; la courbe a un point anguleux $A(0; 1)$ avec deux demi-tangentes de pentes -2 et 2 . En 2 : $f'_g(2) = -2$ et $f'_d(2) = 2$: point anguleux $B(2; 1)$.

3. Variations

Si $x < 0$: $f'(x) = 2x - 2 < 0$; si $0 < x < 1$: $f'(x) = -2x + 2 > 0$; si $1 < x < 2$: $f'(x) < 0$; si $x > 2$: $f'(x) = 2x - 2 > 0$. $f(1) = 2$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		+ 0 -		+
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

<

**Exemple résolu — bénéfice maximal**

Énoncé. Une vannière de Mopti fabrique et vend x paniers par jour ($0 \leq x \leq 30$) ; son bénéfice, en centaines de francs, est $B(x) = -x^2 + 30x - 125$. Trouve le bénéfice maximal et les productions rentables.

1. Dérivée

$B'(x) = -2x + 30$, qui s'annule en $x = 15$, est positive avant et négative après.

2. Tableau et conclusion

x	0	15	30
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-125	100	-125

Le bénéfice est maximal pour 15 paniers et vaut $B(15) = 100$ centaines de francs, soit 10 000 F. Il est positif lorsque $x^2 - 30x + 125 < 0$, c'est-à-dire pour $5 < x < 25$.

Exercices complémentaires

Exercice 10 — Tangentes de pente donnée

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe. Détermine les points de $(\mathcal{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur 9 et donne les équations de ces tangentes.

Exercice 11 — Dérivée d'une racine

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Calcule $f'(x)$, donne la tangente au point d'abscisse 1 et étudie le sens de variation de f .

Exercice 12 — Démontrer une inégalité

Soit $g(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[0; +\infty[$.

- 1) Étudie les variations de g et montre que $g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.
- 2) Dédus-en que pour tout $x \geq 0$: $x^3 \geq 3x - 2$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 13 — Volume maximal

On reprend la boîte du ferblantier (séquence 2) : $V(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)$ pour $x \in]0; 6[$.

- 1) Calcule $V'(x)$ et montre que $V'(x) = 0 \iff 3x^2 - 32x + 60 = 0$.
- 2) Détermine la valeur de x (arrondie au mm) qui rend le volume maximal et donne ce volume.

Devoir de synthèse — Séquence 7

Dérivation

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Nombre dérivé et dérivabilité

- 1) En utilisant la définition, montre que $f(x) = \frac{2}{x+1}$ est dérivable en 1 et calcule $f'(1)$. (2 pt)
- 2) Soit $g(x) = x|x-3|$. Étudie la dérivabilité de g en 3 et interprète graphiquement. (2 pt)
- 3) Montre que $q(x) = \tan x$ a pour dérivée $1 + \tan^2 x$ et donne la tangente à sa courbe au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$. (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Calculs de dérivées

Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2 - 3x + 1)^3 \quad f_2(x) = \frac{3x-1}{2x+4} \quad f_3(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$f_4(x) = x \sin x + \cos 2x$$

(6 pt)

Exercice 3 (8 points) — Variations et tangentes

Soit $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, de courbe $(\mathcal{C})$.

- 1) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$. (2 pt)
- 2) Étudie le sens de variation de f et précise ses extremums relatifs. (2 pt)
- 3) Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. (2 pt)
- 4) Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$ où la tangente est horizontale ? parallèle à la droite $y = -3x$? (2 pt)

Unité d'apprentissage 2

UA2

Suites numériques · Dénombrement · Étude de fonctions ·
Vecteurs, barycentre, produit scalaire · Transformations du plan

Séquence 8

Suites numériques

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Raisonnement par récurrence ; suites arithmétiques et géométriques ; suite monotone, majorée, minorée ; comparaison de suites ; suite convergente ; suites dont le terme général tend vers l'infini ; méthodes numériques (encadrement, dichotomie).

L'essentiel à retenir

- Une **suite** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$; on note u_n son terme de rang n . Elle peut être définie explicitement ($u_n = f(n)$) ou par récurrence (u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$).
- **Raisonnement par récurrence** : pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on vérifie $P(n_0)$ (*initialisation*), puis on montre que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie (*hérédité*). Les deux étapes sont indispensables.
- **Arithmétique** : $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r$; somme de termes consécutifs = $\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$. En particulier $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Géométrique** : $u_{n+1} = qu_n$; $u_n = u_0 q^n$; somme de N termes consécutifs = $\text{premier} \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$ ($q \neq 1$).
- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n (on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si $u_n > 0$). Elle est **majorée** par M si $u_n \leq M$ pour tout n .
- (u_n) **converge** vers ℓ si u_n devient aussi proche de ℓ qu'on veut pour n assez grand. On admet les théorèmes sur les sommes, produits et quotients. Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$; si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$.
- **Comparaison** : si $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$; si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et v_n, w_n tendent vers ℓ , alors $u_n \rightarrow \ell$.
- **Dichotomie** : si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) < 0$, on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et on garde la moitié où f change de signe ; à chaque étape l'amplitude de l'encadrement de la solution est divisée par 2.

Exercices d'application

Exercice 1 — Suites arithmétiques et géométriques

- 1) (u_n) est arithmétique avec $u_4 = 17$ et $u_{12} = 41$. Calcule r , u_0 et $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{30}$.
- 2) (v_n) est géométrique avec $v_1 = 6$ et $v_4 = 162$. Calcule q , v_0 et $v_0 + v_1 + \dots + v_7$.
- 3) Calcule $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$ et $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$.
- 4) Trois nombres en progression arithmétique ont pour somme 27 et pour produit 693. Trouve-les.

Exercice 2 — Premiers termes et sens de variation

Calcule les quatre premiers termes et étudie le sens de variation de chaque suite :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \quad v_n = n^2 - 5n \quad w_n = \frac{3^n}{n+1}$$

$$t_0 = 2, \quad t_{n+1} = t_n - \frac{1}{t_n^2 + 1}$$

Exercice 3 — Raisonnement par récurrence

Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

- 1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$;
- 2) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- 3) $2^n \geq n+1$;
- 4) $4^n - 1$ est divisible par 3.

Pourquoi la propriété « $2^n \geq n+5$ » ne peut-elle pas être démontrée à partir de $n = 1$, bien que l'hérédité soit vraie ?

Exercice 4 — Suite définie par récurrence

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

- 1) Calcule u_1 , u_2 , u_3 . La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 2) On pose $v_n = u_n - 6$. Montre que (v_n) est géométrique ; exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) Déduis-en la limite de (u_n) et calcule $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 5 — Limites de suites

Étudie la convergence des suites :

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 4} \quad b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad e_n = 2^n - n$$

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Suite majorée et croissante

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

- 1) Montre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .
- 2) Montre par récurrence que (u_n) est croissante.
- 3) On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \sqrt{\ell + 6}$. Détermine ℓ .

Exercice 7 — Dichotomie

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

- 1) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0; 1]$.
- 2) On construit deux suites (a_n) et (b_n) : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$; si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, sinon $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Calcule les termes jusqu'au rang 6.
- 3) Montre que $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$ et que $a_n \leq \alpha \leq b_n$. Combien d'étapes faut-il pour obtenir α à 10^{-3} près ?

Exercice 8 — Comparaison

- 1) Montre que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$ et déduis-en la limite de la somme.
- 2) Montre que $u_n = n + \sin n$ tend vers $+\infty$.

Situations complexes

Situation complexe 8.1 Suite arithmétique · somme de termes

L'épargne d'Awa au marché de Médine

1 · Contexte

Awa vend des condiments au marché de Médine. Elle veut acheter un congélateur à 300 000 F pour conserver ses produits et décide d'épargner chaque mois.

2 · Support

Le premier mois, Awa épargne 5 000 F ; chaque mois suivant, elle épargne 1 500 F de plus que le mois précédent. On note e_n la somme épargnée le n -ième mois et $S_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

3 · Fonction

Tu es le neveu d'Awa. Tu l'aides à planifier son achat.

4 · Consignes

- ❶ Quelle est la nature de la suite (e_n) ? Exprime e_n en fonction de n et calcule l'épargne du 12^e mois.
- ❷ Calcule le total épargné au bout d'un an. Montre que $S_n = 750n^2 + 4\,250n$.
- ❸ Au bout de combien de mois Awa pourra-t-elle acheter le congélateur ?

Situation complexe 8.2 Suites géométrique et arithmétique · comparaison

La croissance de la ville de Kayes

1 · Contexte

La mairie d'une commune de la région de Kayes prévoit la construction d'écoles. Deux experts proposent des modèles différents pour prévoir la population.

2 · Support

En 2025, la commune compte 150 000 habitants. Modèle A : la population augmente de 3 % par an. Modèle B : la population augmente de 5 000 habitants par an. On note p_n (modèle A) et a_n (modèle B) la population en 2025 + n .

3 · Fonction

Tu es stagiaire au service du plan. Tu dois comparer les deux modèles.

4 · Consignes

- ❶ Exprime p_n et a_n en fonction de n ; précise leur nature. Calcule-les pour $n = 10$ et $n = 20$.
- ❷ Selon le modèle A, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Étudie les limites de (p_n) et de (a_n) .
- ❸ À partir de quelle année le modèle A donne-t-il une population supérieure à celle du modèle B ? (Utilise la calculatrice.)

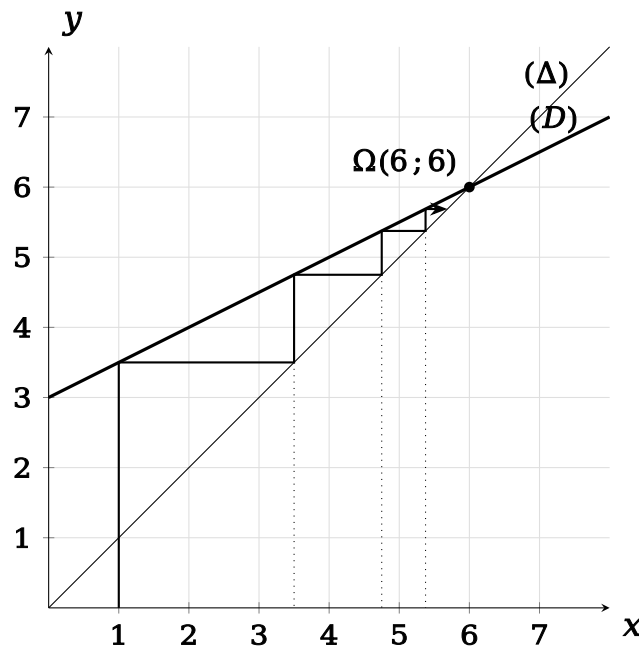
Exemple résolu : représentation graphique d'une suite récurrente

Exemple résolu — suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et « escalier »

Énoncé. Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Représente les premiers termes sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite $(D) : y = \frac{1}{2}x + 3$ et de la droite $(\Delta) : y = x$, puis conjecture et démontre le comportement de la suite.

1. Construction

On place u_0 sur l'axe des abscisses ; on monte jusqu'à (D) pour lire $u_1 = f(u_0)$ en ordonnée ; on reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à (Δ) ; et ainsi de suite.



2. Conjecture

Les termes $u_0 = 1$, $u_1 = 3,5$, $u_2 = 4,75$, $u_3 = 5,375$ semblent croître et se rapprocher de 6, abscisse du point d'intersection Ω de (D) et (Δ) (solution de $x = \frac{1}{2}x + 3$).

3. Démonstration

$v_n = u_n - 6$ vérifie $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = -5$. Donc $u_n = 6 - \frac{5}{2^n}$. Comme $\frac{1}{2^n}$ décroît vers 0, (u_n) est croissante et converge vers 6.

Exemple résolu — raisonnement par récurrence

Énoncé. Démontre que pour tout entier $n \geq 1$: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1. Propriété et initialisation

Soit $P(n)$: « $1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ». Pour $n = 1$: $1^3 = 1$ et $\frac{1 \times 4}{4} = 1$: $P(1)$ est vraie.

2. Hérédité

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

ce qui est $P(n+1)$.

3. Conclusion

D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Par exemple, $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3 = 55^2 = 3025$.

Exercices complémentaires

Exercice 9 — Suite auxiliaire arithmétique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

- 1) Calcule u_1, u_2, u_3 . Montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n .
- 2) On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montre que (v_n) est arithmétique ; exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) Étudie le sens de variation et la limite de (u_n) .

Exercice 10 — Suite qui tend vers l'infini

Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

- 1) Montre que $v_n = u_n - 3$ définit une suite géométrique. Exprime u_n en fonction de n .
- 2) Montre que $u_n \geq n + 4$ pour tout n et déduis-en la limite de (u_n) .
- 3) Calcule $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Exercice 11 — Inégalité de Bernoulli

Soit a un réel positif.

- 1) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
- 2) Déduis-en que si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ (pose $q = 1 + a$).

Exercice 12 — Le salaire de l'enseignant

Un enseignant débute avec un salaire mensuel de 150 000 F. Deux options lui sont proposées : option 1 : augmentation de 6 000 F par an ; option 2 : augmentation de 3,5 % par an.

- 1) Exprime, pour chaque option, le salaire s_n de la n -ième année après l'embauche.
- 2) Compare les salaires après 5 ans, puis après 15 ans.
- 3) Calcule, pour chaque option, la somme totale perçue pendant les 10 premières années (12 mois par an).

Exercice 13 — Encadrement de $\sqrt{2}$ par dichotomie

Soit $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1 ; 2]$.

- 1) Justifie que f s'annule une seule fois sur $[1 ; 2]$, en $\sqrt{2}$.
- 2) Applique 6 étapes de dichotomie et donne un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $\frac{1}{64}$.

Devoir de synthèse — Séquence 8

Suites numériques

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Suites arithmétiques et géométriques

- 1) (u_n) est arithmétique, $u_2 = 7$ et $u_9 = 28$. Calcule r , u_0 et $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.
(3 pt)
- 2) (v_n) est géométrique de termes positifs, $v_1 = 4$ et $v_3 = 36$. Calcule q , v_0 et $v_0 + v_1 + \dots + v_6$.
(3 pt)

Exercice 2 (4 points) — Récurrence

- 1) Démontre par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
(2,5 pt)
- 2) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n - 1$ est divisible par 4. (1,5 pt)

Exercice 3 (10 points) — Suite récurrenteSoit (u_n) définie par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$.

- 1) Calcule u_1 , u_2 et u_3 .
(1,5 pt)
- 2) Montre par récurrence que pour tout n , $u_n \geq 10$.
(2 pt)
- 3) Montre que (u_n) est décroissante.
(1,5 pt)
- 4) Soit $v_n = u_n - 10$. Montre que (v_n) est géométrique ; exprime v_n puis u_n en fonction de n .
(2,5 pt)
- 5) Calcule la limite de (u_n) et la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
(2,5 pt)

Séquence 9

Dénombrement

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Dénombrements par calcul direct (arbre, tableau, listes) ; nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre ; applications injectives (arrangements A_n^p) ; bijections (permutations $n!$) ; parties à p éléments (combinaisons C_n^p) ; relations $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$; triangle de Pascal.

L'essentiel à retenir

- **Principe additif** : si A et B sont disjoints, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$. En général, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$. **Principe multiplicatif** : $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$ (on le visualise avec un **arbre**).
- Soit E à p éléments et F à n éléments.
- **p -listes** (tirages successifs **avec remise**, l'ordre compte) : nombre d'applications de E dans $F = n^p$.
- **Arrangements** (tirages successifs **sans remise**, l'ordre compte) : nombre d'applications injectives de E dans $F = A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ ($p \leq n$).
- **Permutations** : nombre de bijections d'un ensemble à n éléments sur lui-même $= n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$; $0! = 1$.
- **Combinaisons** (tirages **simultanés**, l'ordre ne compte pas) : nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments $= C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
- $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (**triangle de Pascal**) ; un ensemble à n éléments a 2^n parties.
- **Bien choisir le modèle** : l'ordre compte-t-il ? y a-t-il répétition possible ? « au moins un » se traite souvent par le contraire.

Exercices d'application**Exercice 1** — Arbres et listes

- 1) Au restaurant scolaire, on choisit une entrée parmi 3, un plat parmi 4 et un dessert parmi 2. Combien de menus différents ? Fais un arbre partiel.
- 2) Combien de codes à 4 chiffres peut-on former ? Combien ont des chiffres tous distincts ? Combien contiennent au moins une fois le chiffre 7 ?
- 3) On lance trois fois une pièce. Écris toutes les issues à l'aide d'un arbre. Combien comportent exactement deux « Pile » ?

Exercice 2 — Arrangements et permutations

- 1) Calcule A_7^3 , A_{10}^2 , $5!$, $\frac{8!}{6!}$, C_7^3 , C_{10}^8 .
- 2) Le club scientifique compte 30 membres. De combien de façons peut-on élire un président, un secrétaire et un trésorier (trois personnes distinctes) ?
- 3) Combien d'anagrammes (mots, ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres de MALI ? de SIKASSO ? de BAMAKO ?
- 4) Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on écrire ? Combien sont pairs ? Combien sont supérieurs à 400 ?

Exercice 3 — Combinaisons

- 1) Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires. On tire simultanément 3 boules. Combien de tirages possibles ? Combien comportent exactement 2 boules rouges ? au moins une boule noire ?
- 2) Lors d'une réunion, chaque participant serre la main de tous les autres une seule fois. On compte 45 poignées de mains. Combien y a-t-il de participants ?
- 3) Combien un polygone convexe à n côtés a-t-il de diagonales ? Application : $n = 6$ et $n = 12$.

Exercice 4 — Applications d'un ensemble fini dans un autre

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2; 3; 4\}$.

- 1) Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? d'applications injectives ? Pourquoi n'y a-t-il aucune application surjective de E dans F ?
- 2) Combien y a-t-il de bijections de F dans F ? de parties de F ? de parties de F à 2 éléments ?

Exercice 5 — Triangle de Pascal

- 1) Vérifie par le calcul que $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.
- 2) Construis le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 7$.
- 3) Déduis-en $C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$ et vérifie que c'est 2^7 .

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Équations avec des combinaisons

Résous dans $\mathbb{N}$: $A_n^2 = 56$; $C_n^2 = 28$; $C_n^3 = 2C_n^2$; $A_n^3 = 20n$.

Exercice 7 — Le comité du lycée

Une classe compte 12 filles et 18 garçons. On forme un comité de 5 élèves.

- 1) Combien de comités possibles ?
- 2) Combien de comités comportent exactement 2 filles ? au moins une fille ? autant de filles que de garçons (est-ce possible ?)
- 3) Awa et Moussa refusent de siéger ensemble. Combien de comités respectent cette condition ?

Exercice 8 — Chemins dans un quadrillage

Dans un quadrillage, on va du point $O(0; 0)$ au point $A(5; 3)$ en ne faisant que des pas d'une unité vers la droite (D) ou vers le haut (H).

- 1) Justifie qu'un chemin est un mot de 8 lettres contenant 5 fois D et 3 fois H . Combien y a-t-il de chemins ?
- 2) Combien de chemins passent par le point $B(2; 1)$?

Situations complexes**Situation complexe 9.1** Listes · arrangements · contraire**Le code secret du compte de mobile money****1 · Contexte**

Le père de Fanta vient d'ouvrir un compte de mobile money. Il doit choisir un code secret de 4 chiffres et se demande s'il est facile à deviner pour un voleur.

2 · Support

Un code est une suite de 4 chiffres (de 0 à 9). L'opérateur interdit les codes dont les 4 chiffres sont identiques (0000, 1111, ...). Un voleur peut essayer 3 codes avant que le compte ne soit bloqué.

3 · Fonction

Tu es Fanta, élève en 11^e Sciences. Tu expliques à ton père le niveau de sécurité de son code.

4 · Consignes

- ❶ Combien de codes sont autorisés ? Combien ont 4 chiffres distincts ?
- ❷ Combien de codes autorisés contiennent au moins une fois le chiffre 0 ?
- ❸ Si le voleur essaie 3 codes autorisés différents au hasard, quelle proportion des codes autorisés a-t-il testée ? Conclue.

Situation complexe 9.2 Combinaisons · arrangements**La coupe interscolaire de football**

1 - Contexte

Huit lycées de Bamako participent à la coupe interscolaire de football. Le comité d'organisation doit établir le calendrier et préparer les médailles.

2 - Support

Première formule : championnat où chaque équipe rencontre chaque autre une fois. Seconde formule : deux poules de 4 équipes, puis demi-finales et finale. À la fin, on récompense les trois premiers (or, argent, bronze).

3 - Fonction

Tu es secrétaire du comité. Tu dois comparer les deux formules.

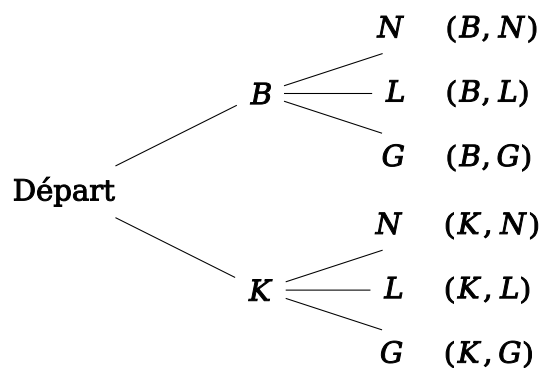
4 - Consignes

- ❶ Combien de matchs comporte la première formule ? Et si les matchs étaient aller-retour ?
- ❷ De combien de façons peut-on répartir les 8 équipes en deux poules de 4 ? Combien de matchs comporte la seconde formule (poules, demi-finales, finale et match pour la 3^e place) ?
- ❸ Combien de podiums différents sont possibles ?

Exemples résolus

Exemple résolu — arbre de choix et principe multiplicatif

Énoncé. Un élève choisit une tenue : une chemise parmi 2 (blanche B , kaki K), puis un pantalon parmi 3 (noir N , bleu L , gris G). Dénombrer les tenues.



Chaque chemin de l'arbre correspond à une tenue : il y en a $2 \times 3 = 6$. C'est le **principe multiplicatif**.

Exemple résolu — choisir le bon modèle

Énoncé. Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Dénombrer les tirages de 3 jetons dans les trois cas : successifs avec remise ; successifs sans remise ; simultanés.

1. Avec remise (l'ordre compte, répétitions possibles)

Un tirage est une 3-liste de $\{1, \dots, 5\}$: $5^3 = 125$ tirages.

2. Sans remise (l'ordre compte, pas de répétition)

Un tirage est un arrangement : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages.

3. Simultané (l'ordre ne compte pas)

Un tirage est une partie à 3 éléments : $C_5^3 = \frac{60}{3!} = 10$ tirages. Chaque partie correspond à $3! = 6$ arrangements.

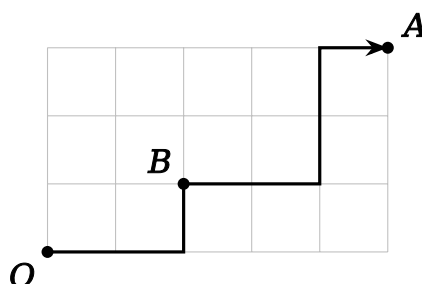
4. Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Chaque nombre est la somme du nombre situé au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche : $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3 = 6 + 4 = 10$.

Exemple résolu — chemins dans un quadrillage

Énoncé. Dans les rues d'un quartier en damier, on va de $O(0;0)$ à $A(5;3)$ en n'avancant que vers l'est (D) ou vers le nord (H), d'une rue à la fois. Combien de chemins différents ? Combien passent par $B(2;1)$?



1. Modélisation

Tout chemin compte 5 pas D et 3 pas H , soit 8 pas : c'est un mot de 8 lettres. Le chemin tracé est $DDHDDHHD$. Un chemin est déterminé par les positions des 3 lettres H parmi les 8 places.

2. Dénombrement

Nombre de chemins : $C_8^3 = 56$. Par B : de O à B , $C_3^1 = 3$ chemins ; de B à A (3 pas D et 2 pas H), $C_5^2 = 10$ chemins ; au total $3 \times 10 = 30$ chemins (principe multiplicatif).

3. Probabilité

Si l'on choisit un chemin au hasard, la probabilité de passer par B est $\frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0,54$.

Exercices complémentaires**Exercice 9** — Immatriculations et questionnaires

- 1) Une immatriculation est formée de 2 lettres (parmi 26) suivies de 4 chiffres. Combien d'immatriculations sont possibles ? Combien n'ont que des chiffres distincts ?
- 2) Un questionnaire comporte 10 questions à 4 réponses possibles chacune. Combien de façons y a-t-il de répondre à toutes les questions ? Combien de façons d'avoir tout faux (une seule bonne réponse par question) ?

Exercice 10 — Rangement de livres

On range sur une étagère 5 livres de mathématiques différents et 3 livres de physique différents.

- 1) Combien de rangements sont possibles ?
- 2) Combien de rangements regroupent les livres d'une même matière ?
- 3) Combien de rangements placent un livre de physique à chaque extrémité ?

Exercice 11 — Délégation équilibrée

Un conseil de classe doit désigner 4 délégués parmi 6 filles et 8 garçons.

- 1) Combien de délégations sont possibles ? Combien comportent 2 filles et 2 garçons ?
- 2) Combien comportent au plus un garçon ?
- 3) Parmi les 4 délégués, on désigne ensuite un porte-parole et un secrétaire. Combien de bureaux possibles au total ?

Exercice 12 — Identités sur les combinaisons

- 1) Montre que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n$.
- 2) Calcule $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$ en interprétant cette somme comme un nombre de parties.
- 3) Résous dans $\mathbb{N}$: $C_{n+1}^2 = C_n^2 + 6$.

Devoir de synthèse — Séquence 9

Dénombrement

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (4 points) — Calculs

- 1) Calcule A_8^3 , C_9^4 , $\frac{10!}{8!2!}$. (1,5 pt)
- 2) Démontre que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ pour $1 \leq p \leq n-1$. (1,5 pt)
- 3) Résous dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_n^2 = 36$. (1 pt)

Exercice 2 (7 points) — Mots et nombres

- 1) Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot KOULIKORO ? (2 pt)
- 2) Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, combien de nombres de 4 chiffres distincts peut-on former (le premier chiffre n'est pas 0) ? Combien sont multiples de 5 ? (3 pt)
- 3) Combien de numéros de téléphone de 8 chiffres commencent par 7 et ne contiennent aucun 0 ? (2 pt)

Exercice 3 (9 points) — Tirages

Un sac contient 4 mangues mûres et 6 mangues vertes, indiscernables au toucher.

- 1) On prend simultanément 3 mangues. Combien de prises possibles ? Combien de prises contiennent exactement une mangue mûre ? au moins une mangue mûre ? (4 pt)
- 2) On prend successivement 3 mangues sans remise. Combien de tirages possibles ? Combien donnent dans l'ordre : mûre, verte, verte ? (3 pt)
- 3) Même question 2 avec remise. (2 pt)

Séquence 10

Étude de fonctions

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonctions polynômes ; fonctions homographiques ; fonctions $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (asymptote oblique) ; fonctions rationnelles dont on sait étudier le signe de la dérivée ; fonctions sinus et cosinus. Extremum relatif ; asymptotes ; centre et axe de symétrie ; résolution graphique d'équations et d'inéquations avec discussion.

L'essentiel à retenir

- **Plan d'étude** : ensemble de définition (et réduction éventuelle par parité ou périodicité) ; limites aux bornes ; dérivée et signe ; tableau de variations ; asymptotes et positions ; points particuliers et tangentes ; courbe.
- **Asymptotes** : si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = a$ est **asymptote verticale** ; si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, la droite $y = b$ est **asymptote horizontale** ; si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, la droite $y = ax + b$ est **asymptote oblique**. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- **Fonction homographique** $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) : $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$; asymptotes $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$; leur point d'intersection est centre de symétrie.
- **Fonction** $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$: par division, $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx + e}$; la droite $y = \alpha x + \beta$ est asymptote oblique et le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie.
- **Symétries** : $I(a; b)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ si, pour tout x tel que $a+h$ et $a-h$ sont dans D_f , $f(a-h) + f(a+h) = 2b$ (ou $f(2a-x) + f(x) = 2b$). La droite $x = a$ est axe de symétrie si $f(2a-x) = f(x)$.
- **Extremum relatif** : si f' s'annule en changeant de signe en x_0 , $f(x_0)$ est un maximum relatif (+ puis -) ou un minimum relatif (- puis +).
- **Discussion graphique** : les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite horizontale $y = m$.
- Fonctions trigonométriques : on réduit l'intervalle d'étude grâce à la périodicité et à la parité ; on admet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, d'où $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Fonction polynôme de degré 3

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

- 1) Calcule $f'(x)$. Détermine a, b, c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
- 2) Étudie la fonction obtenue et trace sa courbe.

Exercice 2 — Fonction bicarrée

Soit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Étudie la parité de f , ses variations, et trace $(\mathcal{C}_f)$.
- 2) Donne le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x et les extremums relatifs de f avec leur nature.
- 3) Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

Exercice 3 — Fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{2x+4}{-x+1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.

- 1) Étudie les variations de f et précise les asymptotes.
- 2) Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 et son coefficient directeur.
- 3) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et discute graphiquement, suivant le réel m , le nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 4 — Asymptote oblique

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.

- 1) Détermine les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$; déduis-en l'asymptote oblique (D) .
- 2) Étudie les variations de f ; détermine les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes.
- 3) Montre que le point I , intersection des asymptotes, est centre de symétrie ; trace (D) et $(\mathcal{C}_f)$.
- 4) Déduis de la courbe l'existence et le signe des solutions de $f(x) = m$.

Exercice 5 — Fonction trigonométrique

Soit $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$.

- 1) Montre que f est paire et 2π -périodique. Justifie qu'il suffit de l'étudier sur $[0; \pi]$.
- 2) Montre que $f'(x) = -2 \sin x(1 + 2 \cos x)$ et dresse le tableau de variations sur $[0; \pi]$.

3) Trace la courbe sur $[-\pi; \pi]$ et résous graphiquement $f(x) = 0$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Retrouver une fonction à partir de son tableau

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+ 0 -			- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- 1) Calcule $f'(x)$ et trouve a, b, c à l'aide du tableau.
- 2) Montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) et étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
- 3) Donne le signe de $f(x)$ sur D_f et trace $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 7 — Fonction rationnelle de degré 3 sur degré 2

Soit $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe (unité 1 cm).

- 1) Détermine les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}$.
- 2) Détermine D_f , les limites de f , et montre que $f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$. Dresse le tableau de variations.
- 3) Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (D) et étudie leur position relative.
- 4) Montre que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie Ω dont tu calculeras les coordonnées.
- 5) Donne l'équation de la tangente (T) en $x = 0$, puis trace (D) , (T) et $(\mathcal{C})$.

Remarque : dans le recueil, la forme demandée était $ax+b+\frac{c}{3x^2+1}$, qui est impossible ; on a corrigé en $ax+b+\frac{cx}{3x^2+1}$.

Situations complexes

Situation complexe 10.1 Coût moyen · minimum · asymptote oblique

La briqueterie de Kalabancoro

1 · Contexte

Une briqueterie de Kalabancoro fabrique des briques en terre stabilisée. Le gérant veut produire au coût moyen le plus bas possible.

2 · Support

Pour x centaines de briques produites par jour ($1 \leq x \leq 30$), le coût total est $C(x) = x^2 + 2x + 100$ (en milliers de FCFA). Le coût moyen par centaine de briques est $M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

3 · Fonction

Tu es le comptable de la briqueterie. Tu dois conseiller le gérant.

4 · Consignes

- ❶ Écris $M(x)$ sous la forme $x + 2 + \frac{100}{x}$ et calcule $M'(x)$.
- ❷ Dresse le tableau de variations de M sur $[1 ; 30]$. Quelle production rend le coût moyen minimal ? Quel est ce coût minimal ?
- ❸ Montre que la droite $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de M en $+\infty$; trace les deux. Interprète pour une grande production.

Situation complexe 10.2 Fonction homographique · asymptote horizontale**Les tecks de la forêt classée****1 · Contexte**

Les Eaux et Forêts reboisent une parcelle avec des tecks. Les forestiers veulent prévoir la hauteur des arbres pour planifier la première coupe.

2 · Support

La hauteur d'un teck (en mètres) t années après sa plantation est modélisée par $h(t) = \frac{30t + 10}{t + 5}$ pour $t \geq 0$. On peut faire une coupe quand les arbres atteignent 20 m.

3 · Fonction

Tu es élève stagiaire chez les Eaux et Forêts. Tu dois analyser le modèle.

4 · Consignes

- ❶ Calcule la hauteur à la plantation et après 5 ans. Étudie le sens de variation de h .
- ❷ Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$. Interprète : quelle hauteur un teck ne dépassera-t-il jamais ?
- ❸ Au bout de combien d'années pourra-t-on faire la coupe ? Trace la courbe de h et son asymptote.

Exemples résolus : tableaux de variations et courbes

Exemple résolu — fonction $\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (problème de la composition du 2^e trimestre)

Énoncé. Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$, de courbe $(\mathcal{C})$. Étudie f , ses asymptotes, son centre de symétrie, et trace $(\mathcal{C})$.

1. Ensemble de définition, continuité, dérivabilité

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; f est rationnelle, donc continue et dérivable sur D .

2. Forme réduite et asymptotes

Par division : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$. Donc $f(x) - (x - 2) = \frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: la droite $(\Delta) : y = x - 2$ est asymptote oblique ; la courbe est au-dessus de (Δ) si $x > -1$, au-dessous si $x < -1$. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$: la droite $x = -1$ est asymptote verticale. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

3. Dérivée et variations

$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; $f(-2) = -5$ (maximum relatif) et $f(0) = -1$ (minimum relatif).

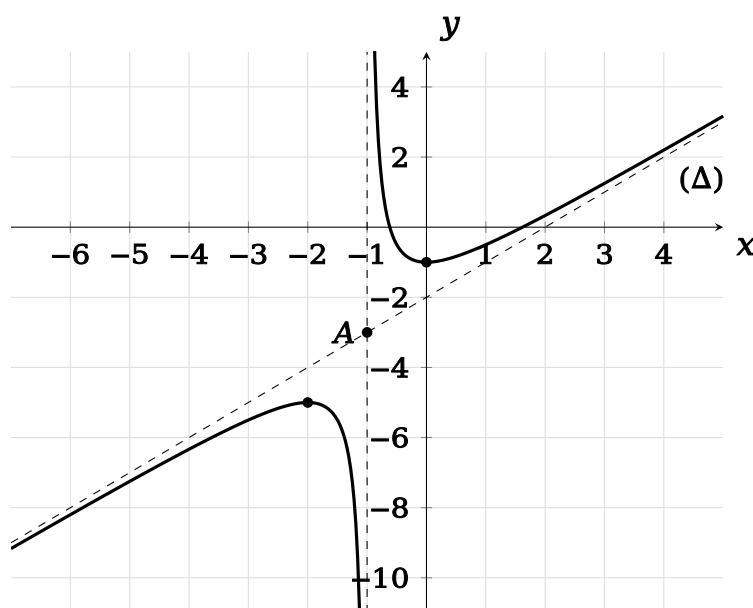
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-5		-1	$+\infty$

4. Centre de symétrie

Les asymptotes se coupent en $A(-1 ; -3)$. Pour $h \neq 0$: $f(-1+h) + f(-1-h) = (h-3) + \frac{1}{h} + (-h-3) - \frac{1}{h} = -6 = 2 \times (-3)$: A est centre de symétrie.

5. Intersections avec les axes et courbe

$f(0) = -1$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (environ $-0,62$ et $1,62$).



Exemple résolu — fonction trigonométrique

Énoncé. Étudie $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$ et trace sa courbe sur $[-\pi; \pi]$.

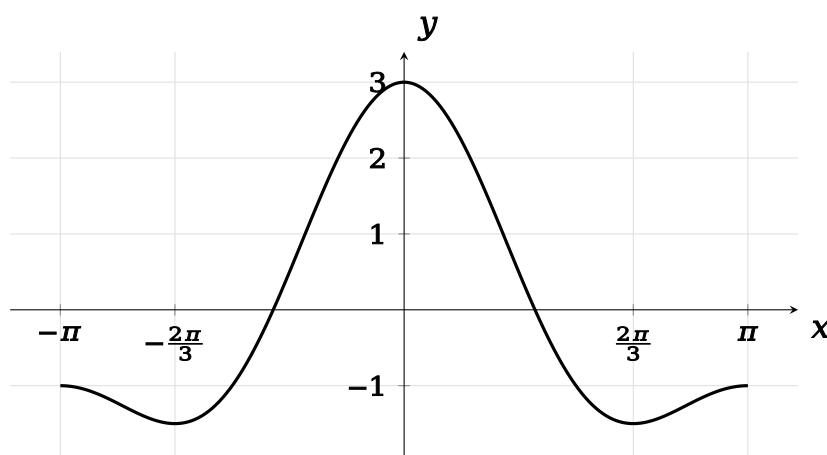
1. Réduction

$f(-x) = f(x)$ (f paire) et $f(x + 2\pi) = f(x)$: on étudie f sur $[0; \pi]$, on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2. Dérivée

$f'(x) = -2 \sin x - 2 \sin 2x = -2 \sin x(1 + 2 \cos x)$. Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$, et $1 + 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2\pi}{3}$. $f(0) = 3$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, $f(\pi) = -1$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	3	$-\frac{3}{2}$	-1



3. Résolution de $f(x) = 0$

$2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$ donne $\cos x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (l'autre racine est inférieure à -1), d'où $x = \pm \alpha + 2k\pi$ avec $\alpha \approx 1,20$ rad.

Exemple résolu — fonction polynôme bicarrée

Énoncé. Étudie $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, trace sa courbe et donne la tangente au point d'abscisse 2.

1. Parité et limites

$f(-x) = f(x)$: f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

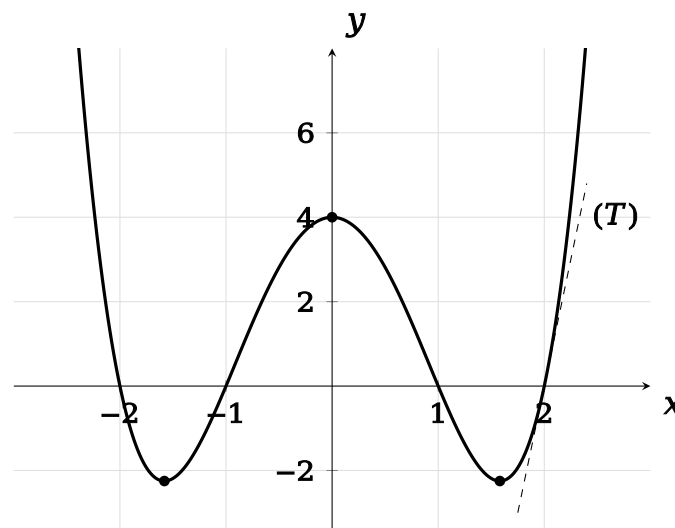
2. Dérivée et variations

$f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$ s'annule en 0 et en $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; $f(0) = 4$ et $f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = -\frac{9}{4}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	4	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$			

3. Signe et tangente

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$: $f(x) < 0$ sur $]-2; -1[\cup]1; 2[$, $f(x) > 0$ ailleurs (sauf aux zéros). $f(2) = 0$ et $f'(2) = 12$: $(T) : y = 12x - 24$.

**Exercices du recueil (repris et vérifiés)**

Exercice 8 — Fonction $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x}$

- 1) Soit $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x}$. Détermine a, b, c pour que (C) passe par $A(1; -2)$ et $B(-4; 8)$ et admette au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- 2) On considère $f(x) = \frac{-x^2+3x-4}{x}$.
 - a) Étudie les variations de f .
 - b) Montre que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de (C) .
 - c) Étudie la position de (C) par rapport à son asymptote oblique (Δ) , puis construis (Δ) et (C) .
 - d) Discute graphiquement, suivant le réel m , le nombre de solutions de $-x^2 + (3-m)x - 4 = 0$.

Exercice 9 — Polynôme défini par un tableau

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

- 1) Donne D_f , calcule $f'(x)$ et détermine a, b, c à l'aide du tableau.
- 2) Donne une équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point d'abscisse 1, puis trace (C_f) .

Exercice 10 — Homographique : paramètres et tangentes

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{ax+b}{x+c}$, de courbe (H) .

- 1) Détermine a, b, c pour que : (H) passe par $A(1; 4)$; la tangente à (H) en $B(5; 0)$ ait pour coefficient directeur 1 ; la droite $x = 3$ soit asymptote verticale.
- 2) Vérifie que $\Omega(3; 2)$ est centre de symétrie de (H) .
- 3) Calcule la pente de la tangente en A . Montre que les tangentes en A et en B sont parallèles et explique ce résultat à l'aide de Ω .

Remarque : le recueil demandait le point d'intersection de ces deux tangentes ; elles sont parallèles (et distinctes), donc ce point n'existe pas.

Exercice 11 — Paramètres puis étude complète

- 1) Soit $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$. Détermine a, b, c pour que $(\mathcal{C}_f)$ passe par $A(0; -6)$ et $B(2; 4)$ et admette en B une tangente de coefficient directeur -3 .
- 2) On considère $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.
 - a) Étudie les variations de f . Écris $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ et déduis-en l'asymptote oblique (Δ) .
 - b) Montre que le point I , intersection des asymptotes, est centre de symétrie ; donne la tangente en $x = 2$.
 - c) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et discute graphiquement, suivant m , l'existence et le signe des racines de $x^2 - (3 + m)x + m + 6 = 0$.

Exercice 12 — Tangente horizontale et asymptote oblique

- 1) Soit $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$. Détermine a, b, c sachant que la courbe passe par $A(0; 2)$ et $B(2; -2)$ et admet une tangente horizontale en $x = 2$.
- 2) Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x - 1}$. Écris $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$; étudie f ; montre que $(D) : y = -x + 1$ est asymptote oblique et étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) ; donne la tangente en 0 et trace $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 13 — Étude complète et intersection avec une droite

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

- 1) Montre qu'il existe a et b tels que $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
- 2) Étudie les limites et le sens de variation de f ; dresse son tableau de variations ; donne les asymptotes.
- 3) Donne la tangente au point d'abscisse 2 et la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
- 4) Trace $(\mathcal{C}_f)$; discute graphiquement le nombre et le signe des solutions de $f(x) = m$.
- 5) Donne le centre de symétrie I et les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec $(\Delta) : y = 2x - 1$.

Exercice 14 — Asymptotes et centre de symétrie

Soit $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x + 2}$.

- 1) Trouve a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$; déduis-en l'asymptote oblique (D) .
- 2) Étudie les variations de f ; montre que le point de concours I des asymptotes est centre de symétrie ; trace (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

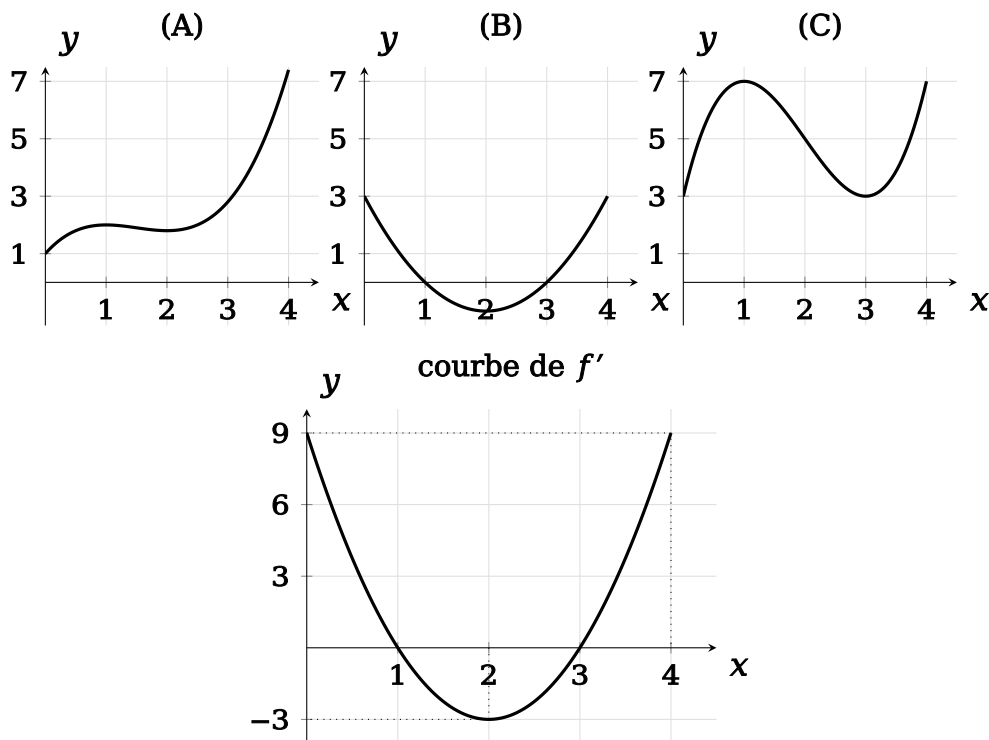
Exercice 15 — Homographique et symétrie axiale

Soit $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$.

- 1) Détermine a, b, c pour que $(\mathcal{C}_f)$ ait pour asymptotes $x = -2$ et $y = 1$ et que la tangente au point d'abscisse -1 soit parallèle à la droite $y = -x$.
- 2) Étudie f et trace $(\mathcal{C}_f)$.
- 3) À l'aide de $(\mathcal{C}_f)$, construis la courbe de $g(x) = \frac{-ax+b}{-x+c}$ (remarque que $g(x) = f(-x)$).

Exercice 16 — Retrouver f à partir du graphique de f'

On donne les courbes de trois fonctions définies sur $[0; 4]$ et la courbe d'une fonction dérivée f' .



- 1) Parmi (A), (B), (C), laquelle est la courbe de f ? Justifie avec le signe de f' .
- 2) Donne le tableau de variations de f et les tangentes à sa courbe aux points d'abscisses 0, 2 et 4.
- 3) On suppose $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; détermine a, b, c, d .

Remarque : sur le graphique du recueil, $f'(4)$ était indiqué égal à 21 ; c'est incompatible avec les autres données ($f'(0) = 9, f'(1) = f'(3) = 0$), qui donnent $f'(4) = 9$. Le graphique a été corrigé.

Exercice 17 — Tableau de variations incomplet

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction g (la zone hachurée n'appartient pas à l'ensemble de définition).

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$			$-$	0	$+$
$g(x)$	2 $\searrow$ $-\infty$			$+\infty$ $\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	

Après avoir complété le tableau, donne : l'ensemble de définition D_g ; les limites de g aux bornes de D_g ; une équation de chacune des asymptotes ; l'extremum relatif de g et sa nature. Trace une courbe possible de g .

Exercices complémentaires**Exercice 18** — Polynôme de degré 3 et discussion

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- 1) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variations.
- 2) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions et donne un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune.
- 3) Discute graphiquement, suivant m , le nombre de solutions de $x^3 - 3x + 1 = m$.

Exercice 19 — Fonction rationnelle sans asymptote oblique

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 5}$.

- 1) Montre que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - 4x + 5}$.
- 2) Étudie les variations de f ; montre que la droite $x = 2$ est axe de symétrie de sa courbe.
- 3) Donne l'asymptote horizontale et trace la courbe.

Exercice 20 — Fonction trigonométrique

Soit $g(x) = \sin 2x - 2 \sin x$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- 1) Étudie la parité de g . Montre que $g'(x) = 2(2 \cos x + 1)(\cos x - 1)$.
- 2) Dresse le tableau de variations de g sur $[0 ; \pi]$ et trace sa courbe sur $[-\pi ; \pi]$.

Devoir de synthèse — Séquence 10

Étude de fonctions

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Fonction homographiqueSoit $g(x) = \frac{x+1}{2x+5}$, de courbe $(\mathcal{C}_g)$.

- 1) Détermine D_g , les limites aux bornes et les asymptotes. (2 pt)
- 2) Étudie le sens de variation de g . (1,5 pt)
- 3) Montre que $S\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$ et trace $(\mathcal{C}_g)$. (2,5 pt)

Exercice 2 (14 points) — ProblèmeSoit $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Détermine D_f et les limites de f aux bornes de D_f . (2 pt)
- 2) Détermine les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. Déduis-en que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) . (3 pt)
- 3) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f . Précise les extremums relatifs. (3 pt)
- 4) Montre que le point $I(-1; -1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. (2 pt)
- 5) Donne une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. (1 pt)
- 6) Trace (Δ) , (T) et $(\mathcal{C})$. Discute graphiquement, suivant m , le nombre de solutions de $f(x) = m$. (3 pt)

Séquence 11

Vecteurs, barycentre et produit scalaire

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Rappels sur les vecteurs du plan (colinéarité, bases, coordonnées) ; barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés ; produit scalaire : définitions, propriétés, bases orthonormées, expression analytique ; applications (orthogonalité, distances, angles, lignes de niveau, cercle).

L'essentiel à retenir

- $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $xy' - x'y = 0$. Deux vecteurs non colinéaires forment une **base** ; tout vecteur s'écrit de façon unique $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- **Barycentre** : si $a+b \neq 0$, le barycentre G de (A, a) , (B, b) est l'unique point tel que $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$; pour tout point M , $(a+b)\vec{MG} = a\vec{MA} + b\vec{MB}$. Coordonnées : $x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}$, $y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$. Même chose avec trois ou quatre points ; **associativité** : on peut remplacer des points par leur barycentre partiel affecté de la somme des coefficients. L'isobarycentre de ABC est son centre de gravité.
- **Produit scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$; si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- Propriétés : symétrie, bilinéarité ; $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Dans une **base orthonormée** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Applications** : Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$; théorème de la médiane $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ (I milieu de $[AB]$) ; $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$: $ax + by + c = 0$; distance de M_0 à cette droite : $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Exercices d'application**Exercice 1** — Vecteurs et colinéarité

Dans un repère, on donne $A(1; 2)$, $B(4; -1)$, $C(-2; 3)$, $D(7; -4)$.

- 1) Calcule les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.
- 2) Les points A , B , D sont-ils alignés ? Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?
- 3) Détermine les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.

Exercice 2 — Barycentre de deux et trois points

- 1) Construis le barycentre G de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et le barycentre H de $(A, 3)$, $(B, -1)$ sur un segment $[AB]$ de 6 cm.
- 2) Avec les points de l'exercice précédent, calcule les coordonnées du barycentre K de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$.
- 3) ABC est un triangle. Construis le barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$ en utilisant l'associativité (introduis le milieu I de $[AC]$).

Exercice 3 — Produit scalaire et nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2)$, $B(4; 6)$ et $C(5; -1)$.

- 1) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC . Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 2) Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et déduis-en une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
- 3) Donne une équation de la hauteur issue de A et de la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 4 — Al-Kashi et théorème de la médiane

- 1) Un triangle a pour côtés $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$. Calcule $\cos \hat{A}$ et déduis-en $\hat{A}$, puis l'aire du triangle.
- 2) Dans ce triangle, calcule la longueur de la médiane issue de A .
- 3) $ABCD$ est un parallélogramme. Montre que $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Exercice 5 — Droites, distances et cercles

- 1) Donne une équation de la droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; 4)$. Calcule la distance du point O à cette droite.
- 2) Donne une équation du cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3. Ce cercle est-il tangent à la droite $(d) : 3x + 4y + 8 = 0$?
- 3) Détermine la nature et les éléments de l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Exercices d'approfondissement**Exercice 6** — Lignes de niveau

A et B sont deux points tels que $AB = 4$; I est le milieu de $[AB]$. Détermine et construis l'ensemble des points M tels que :

- 1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$; $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$;
- 2) $MA^2 + MB^2 = 26$;
- 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$; $MA^2 - MB^2 = 8$.

Exercice 7 — Fonction scalaire de Leibniz

ABC est un triangle et G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.

- 1) Montre que pour tout point M : $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + GC^2$.
- 2) Déduis-en le point M pour lequel $MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ est minimal.

Exercice 8 — Orthogonalité dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté a . I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. En utilisant un repère orthonormé d'origine A , montre que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

Situations complexes**Situation complexe 11.1** Al-Kashi · aire d'un triangle**Le champ triangulaire de Bougouni****1 · Contexte**

Un cultivateur de Bougouni hérite d'un champ triangulaire. Il veut connaître son aire pour calculer la quantité d'engrais nécessaire, mais il n'a mesuré que les côtés.

2 · Support

Les trois côtés du champ mesurent 50 m, 70 m et 80 m. Il faut 25 kg d'engrais par hectare ($1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$) et le sac de 50 kg coûte 17 500 F.

3 · Fonction

Tu es élève en 11^e Sciences. Tu aides le cultivateur.

4 · Consignes

- 1 Fais une figure. Calcule le cosinus de l'angle compris entre les côtés de 50 m et de 80 m, puis la mesure de cet angle.
- 2 Calcule l'aire exacte du champ, puis sa valeur arrondie au m^2 .
- 3 Quelle quantité d'engrais faut-il ? Combien de sacs faut-il acheter et pour quelle somme ?

Situation complexe 11.2 Barycentre · fonction de Leibniz**Le forage des trois villages****1 · Contexte**

Trois villages de la commune de Kati veulent creuser un forage commun. On cherche l'emplacement qui tient compte de la population de chaque village.

2 · Support

Dans un repère orthonormé (unité 1 km), les villages sont en $A(0; 0)$ (600 habi-

tants), $B(6; 0)$ (300 habitants) et $C(0; 9)$ (100 habitants). On choisit le point M qui rend minimale la quantité $S(M) = 600MA^2 + 300MB^2 + 100MC^2$.

3 · Fonction

Tu es technicien de l'hydraulique villageoise. Tu proposes l'emplacement du forage.

4 · Consignes

- ❶ Calcule les coordonnées du barycentre G de $(A, 600)$, $(B, 300)$, $(C, 100)$.
- ❷ Montre que $S(M) = 1\,000MG^2 + S(G)$ et déduis-en où placer le forage.
- ❸ Calcule la distance du forage à chaque village. Quel village est le plus éloigné ?

Exemples résolus

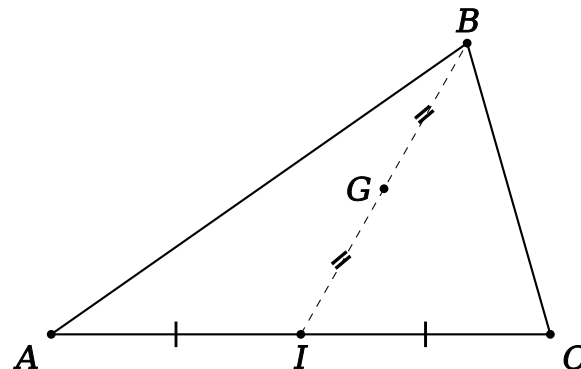
Exemple résolu — construction d'un barycentre par associativité

Énoncé. ABC est un triangle. Construis le barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.

1. Barycentre partiel

Le barycentre de $(A, 1)$, $(C, 1)$ est le milieu I de $[AC]$. Par associativité, G est le barycentre de $(I, 2)$, $(B, 2)$: c'est le milieu de $[IB]$.

2. Figure



3. Vérification vectorielle

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GB} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \text{ car } G \text{ est le milieu de } [IB].$$

Exemple résolu — ligne de niveau $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Énoncé. $AB = 4$ et I est le milieu de $[AB]$. Détermine l'ensemble (Γ) des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

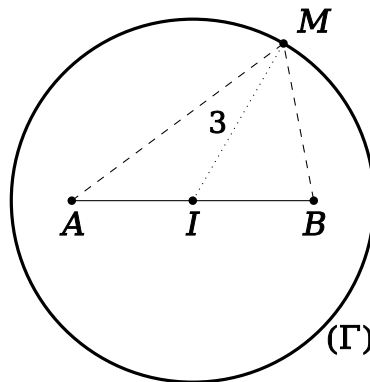
1. Transformation

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 4.$$

2. Conclusion

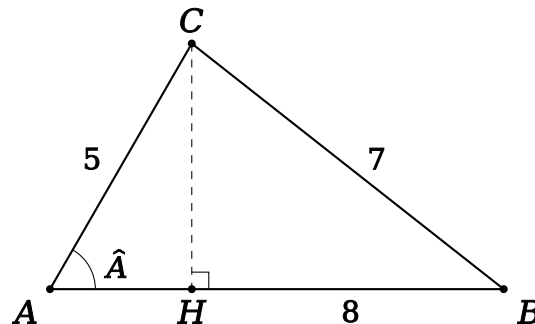
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3 : (\Gamma) \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de}$$

rayon 3.



Exemple résolu — Al-Kashi, aire et hauteur d'un triangle

Énoncé. Un triangle ABC vérifie $AB = 8$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Calcule l'angle $\hat{A}$, l'aire du triangle et la hauteur issue de C .



1. Al-Kashi

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cos \hat{A}$, soit $49 = 64 + 25 - 80 \cos \hat{A}$, d'où $\cos \hat{A} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$ et $\hat{A} = 60^\circ$.

2. Aire

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17,32.$$

3. Hauteur issue de C

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$, donc $CH = \frac{2 \times 10\sqrt{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4,33$. On retrouve $CH = AC \sin 60^\circ$ et $AH = AC \cos 60^\circ = 2,5$.

Exercices complémentaires

Exercice 9 — Barycentre et alignement

ABC est un triangle. I est le barycentre de $(B, 2)$, $(C, 1)$; J est le barycentre de $(A, 3)$, $(C, 1)$ et K celui de $(A, 3)$, $(B, -2)$.

- 1) Place I , J , K . Soit G le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$; montre que G appartient à (AI) .
- 2) Montre que K est le barycentre de $(J, 4)$ et $(I, -3)$, et déduis-en que I , J , K sont alignés.

Exercice 10 — Tangente à un cercle

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(1 ; 2)$ passant par $A(4 ; 6)$.

- 1) Calcule le rayon et écris une équation de $(\mathcal{C})$.
- 2) Montre que la tangente à $(\mathcal{C})$ en A a pour équation $3x + 4y - 36 = 0$.
- 3) La droite $y = -\frac{3}{4}x + k$ est-elle tangente à $(\mathcal{C})$ pour $k = -\frac{1}{4}$?

Exercice 11 — Ligne de niveau $MA^2 - MB^2 = k$

$A(-1 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$ sont donnés dans un repère orthonormé.

- 1) Exprime $MA^2 - MB^2$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M .
- 2) Détermine l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 8$, puis tels que $MA^2 + MB^2 = 16$.

Exercice 12 — Angles et produit scalaire

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(2 ; 1)$ et $\vec{v}(-1 ; 3)$.

- 1) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$; déduis-en une mesure de l'angle géométrique des deux vecteurs.
- 2) Détermine le réel m pour que $\vec{w}(m ; 2)$ soit orthogonal à $\vec{u}$.

Devoir de synthèse — Séquence 11

Vecteurs, barycentre et produit scalaire

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (7 points) — BarycentreDans un repère, on donne $A(-1; 3)$, $B(3; 1)$ et $C(2; -2)$.

- 1) Calcule les coordonnées du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 3)$, $(C, -2)$. (2 pt)
- 2) Détermine les coordonnées du barycentre H de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$ et vérifie que c'est le milieu de $[IC]$, où I est le milieu de $[AB]$. (2,5 pt)
- 3) Détermine et construis l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4$. (2,5 pt)

Exercice 2 (8 points) — Produit scalaire dans un repère orthonorméOn donne $E(2; 1)$, $F(6; 3)$ et $K(0; 5)$ dans un repère orthonormé.

- 1) Calcule $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EK}$. Que peux-tu dire du triangle EFK ? (2 pt)
- 2) Calcule EF , EK , FK et l'aire du triangle EFK . (2 pt)
- 3) Donne une équation du cercle circonscrit au triangle EFK . (2 pt)
- 4) Calcule la distance du point E à la droite (FK) . (2 pt)

Exercice 3 (5 points) — Ligne de niveau A et B sont deux points tels que $AB = 6$; I est le milieu de $[AB]$.

- 1) Démontre que pour tout point M : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 18$. (2 pt)
- 2) Détermine et construis l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 68$. (3 pt)

Séquence 12

Projections, isométries et similitudes

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Projections ; isométries (translations, symétries, rotations) et similitudes (homothéties et composées) : propriétés géométriques, expressions analytiques, images de figures simples ; utilisation pour des problèmes de construction et de configuration.

L'essentiel à retenir

- **Projection** sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) (non parallèle à (D)) : M' est le point d'intersection de (D) et de la parallèle à (Δ) passant par M . Elle conserve le milieu et les barycentres. Projection orthogonale : $(\Delta) \perp (D)$.
- Une **isométrie** conserve les distances : $M'N' = MN$. Elle conserve aussi les angles géométriques, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, le milieu, les aires. Les isométries du plan : translations, rotations, symétries orthogonales (réflexions) et leurs composées.
- Une **similitude** de rapport $k > 0$ multiplie les distances par k : $M'N' = kMN$; elle conserve les angles géométriques et multiplie les aires par k^2 . Exemple : l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 0$, définie par $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, est une similitude de rapport $|k|$.
- **Expressions analytiques** (repère orthonormé) :
 - translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$: $x' = x + a$, $y' = y + b$;
 - homothétie de centre $\Omega(x_0; y_0)$, de rapport k : $x' - x_0 = k(x - x_0)$, $y' - y_0 = k(y - y_0)$;
 - rotation de centre O , d'angle θ : $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$;
 - symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $(x; -y)$; par rapport à la droite $y = x$: $(y; x)$; par rapport à O : $(-x; -y)$.
- **Composées** : deux symétries d'axes parallèles donnent une translation ; deux symétries d'axes sécants en O formant un angle α donnent la rotation de centre O et d'angle 2α ; deux homothéties de même centre de rapports k et k' donnent l'homothétie de rapport kk' .
- Image d'une droite : une droite (parallèle pour une translation ou une homothétie) ; image d'un cercle de centre I et de rayon r par une similitude de rapport k : le cercle de centre I' et de rayon kr .

Exercices d'application

Exercice 1 — Projections

Dans un repère orthonormé, (D) est l'axe des abscisses et (Δ) la droite d'équation $y = 2x$.

- 1) Détermine l'image M' de $M(x; y)$ par la projection sur (D) parallèlement à (Δ) . Calcule l'image de $A(3; 4)$ et de $B(-1; 2)$.
- 2) Détermine l'image de $M(x; y)$ par la projection orthogonale sur la droite $(L) : y = x$. Calcule celle de A .

Exercice 2 — Translations et homothéties

- 1) Donne l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}(2; -3)$ et de l'homothétie h de centre $\Omega(1; 2)$ et de rapport -2 .
- 2) Calcule les images par t et par h du point $A(3; 1)$ et de la droite $(d) : x + y - 1 = 0$.
- 3) Détermine l'image par h du cercle de centre A et de rayon 2.
- 4) Quelle est la nature de la transformation d'expression $x' = 3x - 4$, $y' = 3y + 2$? Donne ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 — Rotations

- 1) Donne l'expression analytique de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis de celle d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 2) Calcule l'image de $A(2; 0)$ et de $B(1; \sqrt{3})$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Que constates-tu ?
- 3) ABC est un triangle équilatéral direct de centre O . Quelle est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$? Et l'image du triangle ?

Exercice 4 — Symétries orthogonales et composées

- 1) Donne l'expression analytique de la symétrie s_1 d'axe (Ox) et de la symétrie s_2 d'axe la droite $y = x$.
- 2) Calcule l'expression analytique de $s_2 \circ s_1$ et reconnais cette transformation.
- 3) Soient $(d_1) : x = 1$ et $(d_2) : x = 4$. Détermine l'expression de $s_{d_2} \circ s_{d_1}$. Quelle est cette transformation ?

Exercice 5 — Conservation et figures

- 1) $ABCD$ est un carré de côté 4 cm et de centre O . Construis son image par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$. Calcule l'aire de l'image.
- 2) Une similitude de rapport 3 transforme un triangle d'aire 5 cm^2 . Quelle est l'aire de l'image ? Quel est le rapport d'une similitude qui transforme un disque d'aire 4π en un disque d'aire 36π ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Construction à l'aide d'une homothétie

ABC est un triangle. On veut inscrire dans ABC un carré $MNPQ$ avec M et N sur $[BC]$, P sur $[AC]$ et Q sur $[AB]$.

- 1) Construis un carré $M_0N_0P_0Q_0$ avec M_0, N_0 sur $[BC]$ et Q_0 sur $[AB]$ (sans condition pour P_0).
- 2) Explique comment l'homothétie de centre B qui transforme P_0 en un point P de $[AC]$ permet d'obtenir le carré cherché. Réalise la construction.

Exercice 7 — Rotation et triangles équilatéraux

ABC est un triangle quelconque. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux ABD et ACE .

- 1) Montre que la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (orientée convenablement) transforme D en B et C en E .
- 2) Dédus-en que $DC = BE$ et donne une mesure de l'angle entre les droites (DC) et (BE) .

Exercice 8 — Reconnaître une similitude

On considère la transformation f d'expression analytique $x' = x - y + 1$, $y' = x + y - 2$.

- 1) Calcule $M'N'$ en fonction de MN pour deux points M et N quelconques. Quel est le rapport de f ?
- 2) Détermine le point invariant Ω de f . Montre que f est la composée d'une rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de centre Ω de rapport $\sqrt{2}$.

Situations complexes

Situation complexe 12.1 Homothétie · rapport · aires

Le plan du nouveau marché de Ségou

1 · Contexte

La mairie de Ségou fait construire un nouveau marché. L'architecte a remis un plan à l'échelle et le conseil municipal veut vérifier les dimensions réelles.

2 · Support

Sur le plan, à l'échelle $\frac{1}{500}$, le marché est un rectangle de 24 cm sur 15 cm ; chaque boutique est un carré de 1 cm de côté sur le plan. Une maquette doit être réalisée à partir du plan en multipliant toutes les longueurs par 4.

3 · Fonction

Tu es le stagiaire du service technique. Tu présentes les calculs au conseil.

4 · Consignes

- ❶ Quelle transformation fait passer du marché réel au plan ? Quel est son rapport ? Calcule les dimensions réelles du marché et d'une boutique.
- ❷ Calcule l'aire réelle du marché (en m²) et l'aire du marché sur le plan ; vérifie la relation entre les aires.
- ❸ Quel est le rapport de la similitude qui fait passer du marché réel à la maquette ? Quelle est l'aire de la maquette ?

Situation complexe 12.2 Rotation · expression analytique

Le logo de la coopérative des tisserands

1 · Contexte

La coopérative des tisserands de Ségou veut un logo formé de trois losanges identiques disposés autour d'un point central, comme les pales d'une hélice.

2 · Support

Dans un repère orthonormé, le premier losange a pour sommets $O(0; 0)$, $A(2; 1)$, $B(4; 0)$ et $C(2; -1)$. Les deux autres losanges s'obtiennent par les rotations de centre O et d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

3 · Fonction

Tu es le graphiste de la coopérative. Tu dois fournir les coordonnées exactes pour l'imprimeur.

4 · Consignes

- ❶ Vérifie que $OABC$ est un losange. Donne l'expression analytique de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- ❷ Calcule les coordonnées exactes des images de A , B et C par r , puis par $r \circ r$.
- ❸ Dessine le logo. Quelle est son aire totale ?

Exemple résolu : images d'un triangle

Exemple résolu — homothétie et rotation dans un repère

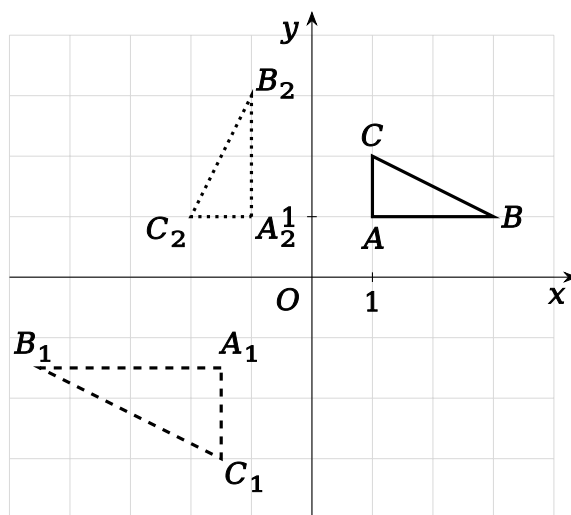
Énoncé. On donne $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(1; 2)$. Construis l'image $A_1B_1C_1$ de ABC par l'homothétie h de centre O et de rapport $-1,5$, puis l'image $A_2B_2C_2$ par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Compare les aires.

1. Expressions analytiques

$h : x' = -1,5x, y' = -1,5y$; $r : x' = -y, y' = x$.

2. Images

$A_1(-1,5; -1,5)$, $B_1(-4,5; -1,5)$, $C_1(-1,5; -3)$; $A_2(-1; 1)$, $B_2(-1; 3)$, $C_2(-2; 1)$.

**3. Aires**

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$. La rotation est une isométrie : $\mathcal{A}(A_2B_2C_2) = 1$.
L'homothétie de rapport $-1,5$ est une similitude de rapport $1,5$: $\mathcal{A}(A_1B_1C_1) = 1,5^2 \times 1 = 2,25$.

Exercices complémentaires**Exercice 9** — Composée d'homothéties

h_1 est l'homothétie de centre O et de rapport 2 ; h_2 est l'homothétie de centre $A(3; 0)$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

- 1) Donne les expressions analytiques de h_1 et h_2 .
- 2) Détermine l'expression analytique de $h_2 \circ h_1$. Quelle est cette transformation ?

Exercice 10 — Image d'un cercle par une rotation

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $I(2; 1)$ et de rayon 3 , et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Détermine l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par r et donne son équation.
- 2) Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont-ils sécants ? (Compare la distance des centres à la somme des rayons.)

Exercice 11 — Similitude et triangle

Soit $f : x' = 2x - 2y, y' = 2x + 2y$.

- 1) Montre que f multiplie les distances par $2\sqrt{2}$.
- 2) Calcule les images de $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$ et compare les aires des triangles ABC et $A'B'C'$.

Exercice 12 — Problème de construction

On donne deux droites sécantes (D_1) et (D_2) et un point A qui n'est sur aucune d'elles. Construis un triangle ABC équilatéral avec $B \in (D_1)$ et $C \in (D_2)$. (*Indication : C est l'image de B par une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; cherche C à l'intersection de (D_2) et de l'image de (D_1) .*)

Devoir de synthèse — Séquence 12

Projections, isométries et similitudes

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (9 points) — Expressions analytiques

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(2; 1)$ et la droite $(d) : 2x - y + 3 = 0$.

- 1) Donne l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}(-1; 3)$, puis l'image de A et de (d) par t . (2,5 pt)
- 2) Donne l'expression analytique de l'homothétie h de centre $\Omega(1; -1)$ et de rapport 3 ; calcule l'image de A et de (d) . (3 pt)
- 3) Donne l'expression analytique de la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$; calcule l'image de A . (1,5 pt)
- 4) Détermine l'image de $M(x; y)$ par la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées, puis par la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à (d) . (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Reconnaître une transformation

- 1) Reconnais la transformation d'expression $x' = -2x + 3$, $y' = -2y + 6$ et donne ses éléments. (2 pt)
- 2) Reconnais la transformation d'expression $x' = -y + 2$, $y' = x$ (cherche un point invariant). (2 pt)
- 3) Calcule l'expression de la composée $s_2 \circ s_1$ où s_1 est la symétrie d'axe (Oy) et s_2 la symétrie d'axe $x = 3$. (2 pt)

Exercice 3 (5 points) — Configuration

$ABCD$ est un carré direct de centre O . On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Détermine les images de A, B, C, D par r . (2 pt)
- 2) I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. Montre que $r(I) = J$ et déduis-en que $OI = OJ$ et $(OI) \perp (OJ)$. (3 pt)

Unité d'apprentissage 3

UA3

Probabilités · Géométrie dans l'espace · Statistique

Séquence 13

Probabilités

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Vocabulaire : épreuve, univers, éventualité, événement, événement réalisé, certain, impossible, contraire, incompatibles. Probabilité d'un événement dans le cas d'équiprobabilité, calculée à partir des dénombrements.

L'essentiel à retenir

- Une **épreuve** (expérience aléatoire) a plusieurs résultats possibles, appelés **éventualités** (ou issues) ; leur ensemble est l'**univers** Ω .
- Un **événement** est une partie de Ω . Il est **réalisé** si l'issue obtenue lui appartient. Ω est l'événement **certain**, $\emptyset$ l'événement **impossible** ; un singleton est un événement élémentaire.
- $A \cap B$ (« A et B ») ; $A \cup B$ (« A ou B ») ; l'événement **contraire** $\bar{A}$ est réalisé quand A ne l'est pas. A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- Une probabilité vérifie : $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles).
- **Équiprobabilité** (dé non truqué, tirage « au hasard », boules indiscernables au toucher...) : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
- On choisit le modèle de dénombrement de Ω (listes, arrangements, combinaisons) selon la façon dont l'épreuve est réalisée, et on dénombre A **avec le même modèle**.
- « Au moins un » : on passe souvent par l'événement contraire « aucun ».

Exercices d'application**Exercice 1** — Vocabulaire

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère A : « obtenir un nombre pair », B : « obtenir un multiple de 3 », C : « obtenir 7 ».

- 1) Décris l'univers Ω . Écris A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$. Que dire de C ?
- 2) A et B sont-ils incompatibles ? Donne deux événements incompatibles non contraires.
- 3) Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\bar{B})$.

Exercice 2 — Deux dés

On lance deux dés équilibrés, l'un rouge, l'autre vert.

- 1) Combien y a-t-il d'éventualités ? Présente-les dans un tableau à double entrée.
- 2) Calcule la probabilité d'obtenir : un double ; une somme égale à 7 ; une somme au moins égale à 10 ; au moins un 6.

Exercice 3 — Tirages simultanés

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.

- 1) Calcule la probabilité d'obtenir : 3 boules rouges ; exactement 2 boules rouges ; au moins une boule noire.
- 2) Calcule la probabilité d'obtenir des boules de la même couleur.

Exercice 4 — Tirages successifs

On reprend l'urne précédente. On tire successivement 2 boules.

- 1) Les tirages se font **sans remise**. Calcule la probabilité d'obtenir : deux boules rouges ; une rouge puis une noire ; deux boules de couleurs différentes.
- 2) Reprends la question avec remise.

Exercice 5 — Le comité et le hasard

Une classe de 30 élèves compte 12 filles. On tire au sort un bureau formé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier (trois élèves distincts). Calcule la probabilité que : le président soit une fille ; le bureau ne comporte que des garçons ; le bureau comporte au moins une fille.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Les anniversaires

On suppose qu'une année a 365 jours et que tous les jours de naissance sont équiprobables.

- 1) Dans un groupe de n personnes, exprime la probabilité p_n que toutes aient des dates d'anniversaire différentes.
- 2) Calcule à la calculatrice p_{10} , p_{23} et p_{40} . Interprète $1 - p_{23}$.

Exercice 7 — Mots aléatoires

On écrit au hasard un mot avec toutes les lettres du mot BAMAKO (chaque anagramme a la même probabilité).

- 1) Calcule la probabilité que le mot commence par B ; que les deux A soient côte à côte ; que le mot soit BAMAKO.
- 2) Calcule la probabilité que le mot commence et finisse par une voyelle.

Exercice 8 — Rangement au hasard

Trois lettres sont mises au hasard dans trois enveloppes portant les adresses des destinataires (une lettre par enveloppe).

- 1) Combien y a-t-il de façons de ranger les lettres ? Liste-les.
- 2) Calcule la probabilité qu'aucune lettre ne soit dans la bonne enveloppe ; qu'une seule lettre soit bien placée ; que toutes soient bien placées.

Situations complexes**Situation complexe 13.1** Combinaisons · probabilité · contraire**Le contrôle des sacs de riz à l'Office du Niger****1 · Contexte**

Un magasin de l'Office du Niger, à Niono, reçoit un lot de sacs de riz. Le magasinier contrôle la qualité avant d'accepter le lot.

2 · Support

Le lot contient 20 sacs, dont 4 contiennent du riz mal décortiqué. Le magasinier prélève simultanément et au hasard 3 sacs. Le lot est refusé si au moins un des sacs prélevés est défectueux.

3 · Fonction

Tu es l'assistant du magasinier. Tu dois évaluer les chances d'accepter ce lot.

4 · Consignes

- ❶ Combien y a-t-il de prélèvements possibles ? Justifie l'équiprobabilité.
- ❷ Calcule la probabilité qu'aucun sac prélevé ne soit défectueux ; qu'exactement un sac le soit.
- ❸ Quelle est la probabilité que le lot soit refusé ? Ce contrôle te paraît-il efficace ?

Situation complexe 13.2 Probabilité · équiprobabilité · jeu**La tombola de la kermesse****1 · Contexte**

Pour financer la bibliothèque, l'association des parents d'élèves organise une tombola lors de la kermesse du lycée.

2 · Support

200 billets numérotés de 1 à 200 sont vendus à 500 F chacun. Les lots sont : une moto pour le numéro tiré au sort en premier ; un téléphone pour chacun des billets dont le numéro se termine par 7 (autres que le gagnant de la moto) ; un sac de sucre pour chaque multiple de 25. Le tirage est équiprobable.

3 · Fonction

Tu es le trésorier de l'association. Tu informes les acheteurs de leurs chances.

4 · Consignes

- ❶ Combien de numéros se terminent par 7 ? Combien sont multiples de 25 ? Ces deux événements sont-ils incompatibles ?
- ❷ Moussa achète un billet. Calcule la probabilité qu'il gagne un téléphone ou un sac de sucre (sans tenir compte de la moto).
- ❸ Calcule la recette de la tombola. Moussa achète 4 billets différents : quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'eux se termine par 7 ?

Exemples résolus**Exemple résolu — somme de deux dés**

Énoncé. On lance deux dés équilibrés et on note la somme S des faces. Calcule $P(S = 7)$, $P(S \geq 10)$ et la probabilité d'obtenir au moins un 6.

1. Univers

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ a $6^2 = 36$ éventualités équiprobables. Le tableau donne la somme :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	<u>10</u>
5	6	7	8	9	<u>10</u>	<u>11</u>
6	7	8	9	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>

2. Calculs

$P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (cases en gras) ; $P(S \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (cases soulignées). « Au moins un 6 » est le contraire de « aucun 6 », qui compte $5^2 = 25$ éventualités : $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Exemple résolu — tirages sans remise et arbre

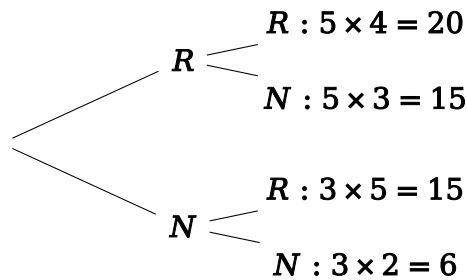
Énoncé. Une urne contient 5 boules rouges (R) et 3 noires (N). On tire successivement deux boules sans remise. Calcule la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

1. Dénombrement

Un tirage est un arrangement de 2 boules parmi 8 : $A_8^2 = 56$ tirages équiprobables. « R puis N » : $5 \times 3 = 15$ tirages ; « N puis R » : $3 \times 5 = 15$ tirages.

2. Résultat

$$P = \frac{15 + 15}{56} = \frac{15}{28}.$$



On vérifie que $20 + 15 + 15 + 6 = 56$.

Exercices complémentaires

Exercice 9 — Jeu de 32 cartes

On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs : cœur, carreau, pique, trèfle ; 8 cartes par couleur dont un as).

- 1) Combien de tirages possibles ?
- 2) Calcule la probabilité d'obtenir : deux as ; deux cartes de la même couleur ; au moins un cœur.

Exercice 10 — Lancers d'une pièce

On lance trois fois une pièce équilibrée.

- 1) Écris l'univers à l'aide d'un arbre.
- 2) Calcule la probabilité d'obtenir : exactement deux « Pile » ; au moins un « Face » ; trois résultats identiques.

Exercice 11 — Codes et probabilités

On forme au hasard un code de 3 chiffres (de 0 à 9), chaque code ayant la même probabilité.

- 1) Calcule la probabilité que les trois chiffres soient distincts ; que le code contienne au moins un 5 ; que le code soit un nombre pair (le premier chiffre peut être 0).
- 2) Calcule la probabilité que les chiffres soient rangés dans l'ordre strictement croissant.

Exercice 12 — Le marché aux mangues

Un panier contient 12 mangues, dont 3 sont abîmées. Un client en choisit 4 au hasard.

- 1) Calcule la probabilité qu'aucune ne soit abîmée.
- 2) Calcule la probabilité qu'au moins deux soient abîmées.

Devoir de synthèse — Séquence 13

Probabilités

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Un dé

On lance un dé équilibré à six faces. On considère les événements A : « le résultat est un nombre premier » et B : « le résultat est au moins égal à 4 ».

- 1) Écris Ω , A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$. (2,5 pt)
- 2) Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et vérifie que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (2,5 pt)

Exercice 2 (9 points) — Urne

Une urne contient 4 boules blanches numérotées 1, 2, 3, 4 et 2 boules noires numérotées 1, 2, indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément deux boules. Calcule la probabilité des événements : (5 pt)
 - a) E_1 : « les deux boules sont blanches » ;
 - b) E_2 : « les deux boules sont de couleurs différentes » ;
 - c) E_3 : « la somme des numéros est égale à 3 » ;
 - d) E_4 : « au moins une boule porte le numéro 1 ».
- 2) On tire successivement et avec remise deux boules. Calcule la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur. (4 pt)

Exercice 3 (6 points) — Le club de lecture

Un club de lecture compte 7 filles et 5 garçons. On désigne au hasard une délégation de 4 membres.

- 1) Calcule la probabilité que la délégation comporte autant de filles que de garçons. (2 pt)
- 2) Calcule la probabilité qu'elle comporte au moins un garçon. (2 pt)
- 3) Fatou et Ibrahim font partie du club. Calcule la probabilité qu'ils soient tous les deux dans la délégation. (2 pt)

Séquence 14

Géométrie dans l'espace

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Espace et parallélisme (consolidation de la 10^e) ; repérage d'un point de l'espace ; orthogonalité : droites orthogonales, droite et plan orthogonaux, plans perpendiculaires ; vecteurs de l'espace : définition, opérations, base ; barycentre dans l'espace.

L'essentiel à retenir

- Par trois points non alignés passe un unique plan. Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, la droite est contenue dans ce plan. Deux plans distincts sécants se coupent suivant une droite.
- Deux droites de l'espace sont **coplanaires** (sécantes ou parallèles) ou **non coplanaires**. Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Deux plans sont parallèles si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre. Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre suivant deux droites parallèles. **Théorème du toit** : si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites.
- **Orthogonalité** : deux droites sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires. Une droite est **orthogonale à un plan** si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan ; elle est alors orthogonale à toutes les droites du plan. Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
- **Vecteurs** : mêmes règles de calcul que dans le plan (Chasles, colinéarité). Trois vecteurs sont **coplanaires** si l'un est combinaison linéaire des deux autres. Trois vecteurs non coplanaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment une **base** ; tout point M s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} : (x ; y ; z)$ sont ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Dans un repère orthonormé :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

milieu $I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- **Barycentre** de points pondérés de l'espace : même définition et mêmes propriétés que dans le plan (associativité, coordonnées). L'isobarycentre d'un tétraèdre est l'intersection des segments joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée ; il est situé aux $\frac{3}{4}$ de chacun de ces segments à partir du sommet.

Exercices d'application

Exercice 1 — Positions relatives dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, (AE) , (BF) , (CG) , (DH) sont des arêtes parallèles).

- 1) Donne la position relative des droites : (AB) et (HG) ; (AB) et (CG) ; (AC) et (EG) ; (AG) et (BH) .
- 2) Donne la position relative de la droite (EG) et du plan (ABC) ; des plans (ABF) et (DCG) ; des plans (ACG) et (BDH) .
- 3) Détermine l'intersection des plans (ACG) et (BDH) , puis celle des plans (AFH) et (BCG) .

Exercice 2 — Section d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre ; I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[AC]$ et K un point de $[AD]$ tel que $AK = \frac{1}{3}AD$.

- 1) Montre que (IJ) est parallèle au plan (BCD) .
- 2) Détermine l'intersection des plans (IJK) et (BCD) (utilise le théorème du toit).
- 3) Construis la section du tétraèdre par le plan (IJK) .

Exercice 3 — Orthogonalité dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube.

- 1) Montre que la droite (BD) est orthogonale au plan (ACG) . Dédus-en que $(BD) \perp (AG)$.
- 2) Montre de même que $(AG) \perp (BE)$ (montre que (BE) est orthogonale au plan (AFG)). Dédus-en que (AG) est orthogonale au plan (BDE) .
- 3) Les plans (ACG) et (BDH) sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 4 — Coordonnées dans l'espace

On munit l'espace d'un repère orthonormé et on donne $A(1;2;0)$, $B(3;0;1)$, $C(0;1;0)$, $D(2;3;4)$.

- 1) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et les longueurs AB , AC , BC . Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 2) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont-ils coplanaires ? (Cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.)
- 3) Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et de l'isobarycentre G de $ABCD$.

Exercice 5 — Vecteurs coplanaires

$ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

- 1) Montre que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
- 2) Dédus-en que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Isobarycentre d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre et G son isobarycentre. A' est le centre de gravité du triangle BCD .

- 1) Montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.
- 2) I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montre que G est le milieu de $[IJ]$.
Conclus sur les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées.

Exercice 7 — Ensemble de points

A et B sont deux points de l'espace et I le milieu de $[AB]$. Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- 1) $MA = MB$;
- 2) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
- 3) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB$.

Situations complexes

Situation complexe 14.1 Repérage · distances · orthogonalité

Le hangar de stockage de coton

1 · Contexte

La CMDT construit à Koutiala un hangar en forme de pavé droit pour stocker le coton. Le chef de chantier veut placer des poutres de renfort et vérifier leurs longueurs.

2 · Support

On place un repère orthonormé (unité : le mètre) d'origine un coin O du sol. Le hangar est le pavé $OABCDEFG$ avec $A(20; 0; 0)$, $C(0; 12; 0)$, $B(20; 12; 0)$ et une hauteur de 6 m ($D(0; 0; 6)$ au-dessus de O , $F(20; 12; 6)$ au-dessus de B). Une poutre relie O à F ; une autre relie le milieu M de $[AB]$ au point D .

3 · Fonction

Tu es apprenti chez le chef de chantier. Tu prépares les mesures.

4 · Consignes

- 1) Donne les coordonnées de tous les sommets du pavé, de M , et calcule les longueurs des poutres $[OF]$ et $[MD]$.
- 2) Les deux poutres sont-elles orthogonales ? Calcule l'angle (arrondi au degré) qu'elles forment.
- 3) La poutre $[OF]$ est-elle orthogonale au plan du sol ? Justifie. Quelle est la longueur de sa projection orthogonale sur le sol ?

Situation complexe 14.2 Barycentre dans l'espace · tétraèdre**La sculpture de la place du Cinquantenaire****1 · Contexte**

Pour une fête, la commune fait réaliser une sculpture métallique en forme de tétraèdre régulier, posée sur une face. Pour fixer un projecteur à l'intérieur, il faut connaître la position de son centre de gravité.

2 · Support

Le tétraèdre $ABCD$ a toutes ses arêtes égales à 3 m ; la base BCD repose sur le sol. Son centre de gravité est l'isobarycentre G des quatre sommets.

3 · Fonction

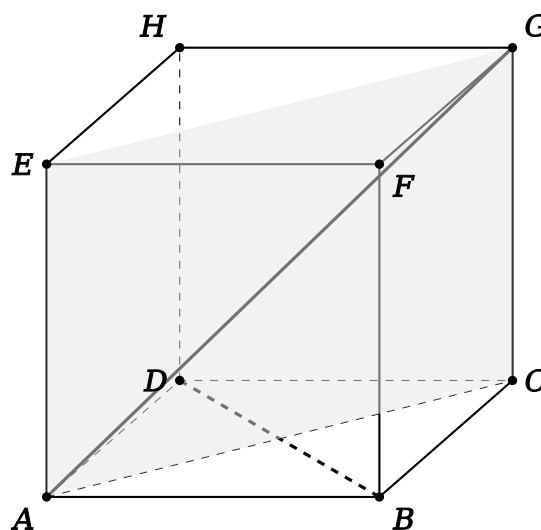
Tu es élève stagiaire chez le ferronnier. Tu dois indiquer où placer le projecteur.

4 · Consignes

- ❶ Soit A' le centre de gravité du triangle BCD . Calcule BA' puis la hauteur AA' du tétraèdre (valeur exacte, puis au cm près).
- ❷ Montre que G appartient à $[AA']$ avec $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$. À quelle hauteur au-dessus du sol faut-il placer le projecteur ?
- ❸ Calcule la longueur totale de barre métallique utilisée pour les arêtes.

Exemple résolu : orthogonalité dans un cube**Exemple résolu — droite orthogonale à un plan**

Énoncé. $ABCDEFGH$ est un cube. Montre que (BD) est orthogonale au plan (ACG) , puis que $(BD) \perp (AG)$.

**1. Deux droites sécantes du plan (ACG)**

$ABCD$ est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires : $(BD) \perp (AC)$.

L'arête (CG) est orthogonale à la face $ABCD$, donc à toute droite de cette face : $(CG) \perp (BD)$.

2. Conclusion

(BD) est orthogonale aux deux droites sécantes (AC) et (CG) du plan (ACG) : (BD) est orthogonale au plan (ACG) , donc à toute droite de ce plan, en particulier à (AG) .

3. Vérification avec des coordonnées

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ (orthonormé si l'arête vaut 1) : $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$, d'où $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AG} = -1 + 1 + 0 = 0$.

Exercices complémentaires

Exercice 8 — Arêtes opposées d'un tétraèdre régulier

$ABCD$ est un tétraèdre régulier et I est le milieu de $[CD]$.

- 1) Montre que (CD) est orthogonale aux droites (AI) et (BI) .
- 2) Déduis-en que (CD) est orthogonale au plan (ABI) , puis que $(AB) \perp (CD)$.

Exercice 9 — Section d'un cube par un plan

$ABCDEFGH$ est un cube. I, J, K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$.

- 1) Montre que (IJ) est parallèle à (AC) puis à la droite (EG) .
- 2) Construis la section du cube par le plan (IJK) ; montre que c'est un hexagone régulier.

Exercice 10 — Pavé droit dans un repère

On considère le pavé droit $OABCDEFG$ avec $A(4; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(0; 0; 2)$.

- 1) Donne les coordonnées des autres sommets et la longueur de la grande diagonale.
- 2) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas coplanaires, où F est le sommet opposé à O .
- 3) Calcule les coordonnées de l'isobarycentre des huit sommets. Que représente ce point ?

Devoir de synthèse — Séquence 14

Géométrie dans l'espace

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (7 points) — Parallélisme et sections

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[SA]$ et J celui de $[SB]$.

- 1) Montre que (IJ) est parallèle à (CD) . (2 pt)
- 2) Détermine l'intersection des plans (SAD) et (SBC) (théorème du toit). (2,5 pt)
- 3) Construis la section de la pyramide par le plan (IJC) et donne sa nature. (2,5 pt)

Exercice 2 (5 points) — Orthogonalité

$ABCDEFGH$ est un cube.

- 1) Montre que (AF) est orthogonale au plan (BEH) : pour cela, montre que $(AF) \perp (BE)$ et $(AF) \perp (EH)$. (3 pt)
- 2) Dédus-en que $(AF) \perp (BH)$. (2 pt)

Exercice 3 (8 points) — Coordonnées et barycentre

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$ et $O(0; 0; 0)$.

- 1) Calcule AB , AC , BC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (2,5 pt)
- 2) Calcule les coordonnées du centre de gravité K du triangle ABC et de l'isobarycentre G du tétraèdre $OABC$. Vérifie que $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OK}$. (3 pt)
- 3) Calcule les coordonnées du barycentre H de $(O, 1)$, $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$. (2,5 pt)

Séquence 15

Statistique

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Vocabulaire : population, caractère, série statistique, effectifs, effectifs cumulés, fréquences, fréquences cumulées ; dépouillement ; représentations (diagrammes, histogramme, polygone des effectifs cumulés) ; caractéristiques de position (mode, moyenne, médiane) et de dispersion (étendue, variance, écart-type).

L'essentiel à retenir

- On étudie un **caractère** sur une **population** d'effectif total N . Le caractère est **discret** (valeurs isolées x_i) ou **continu** (valeurs regroupées en classes $[a_i ; a_{i+1}[$ de centre $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$).
- Fréquence** : $f_i = \frac{n_i}{N}$ (avec $\sum f_i = 1$). **Effectifs cumulés croissants** : somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales à x_i .
- Représentations** : diagramme en bâtons (caractère discret), histogramme (caractère continu : l'aire des rectangles est proportionnelle à l'effectif), diagramme circulaire (angle = $360^\circ \times f_i$), polygone des effectifs cumulés.
- Mode** : valeur (ou classe) de plus grand effectif. **Moyenne** : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum n_i x_i = \sum f_i x_i$ (on remplace x_i par le centre c_i pour des classes).
- Médiane** Me : valeur qui partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif. Si N est impair, c'est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$; si N est pair, la demi-somme des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$. Pour des classes, on l'obtient par interpolation linéaire sur le polygone des effectifs cumulés.
- Variance** : $V = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$; **écart-type** : $\sigma = \sqrt{V}$. Plus σ est grand, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.
Étendue : $x_{\max} - x_{\min}$.

Exercices d'application**Exercice 1** — Dépouillement et caractéristiques d'une série discrète

Voici les notes sur 20 obtenues par les 30 élèves d'une classe à un devoir :

10 12 9 14 10 11 6 15 10 12 8 11 9 10 14 12 9 11 10 8 15 11 9 6 12
10 14 8 9 11

- Dépouille cette série dans un tableau (notes, effectifs, effectifs cumulés croissants, fréquences en %).
- Représente la série par un diagramme en bâtons.

- 3) Détermine le mode, la médiane, la moyenne, la variance et l'écart-type (arrondis au centième).
- 4) Quel pourcentage d'élèves a une note au moins égale à la moyenne de la classe ?

Exercice 2 — Caractère continu

Une enquête auprès de 50 vendeurs ambulants de Bamako donne leur gain journalier (en FCFA) :

Gain	[0 ; 1 000[	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 4 000[	[4 000 ; 5 000[
Effectif	6	12	17	10	5

- 1) Construis l'histogramme et le polygone des effectifs cumulés croissants.
- 2) Donne la classe modale ; calcule le gain moyen et l'écart-type.
- 3) Détermine graphiquement puis par le calcul la médiane.
- 4) Quel pourcentage de vendeurs gagne moins de 2 000 F par jour ?

Exercice 3 — Diagramme circulaire

Dans un lycée de 800 élèves, la répartition par moyen de transport est : à pied 35 %, à vélo 15 %, en moto 30 %, en transport en commun 20 %.

- 1) Calcule les effectifs de chaque modalité.
- 2) Calcule les angles et représente la série par un diagramme circulaire.

Exercice 4 — Propriétés de la moyenne

- 1) La moyenne de 5 notes est 11. Quelle note faut-il ajouter pour que la moyenne des 6 notes soit 12 ?
- 2) Dans une classe, la moyenne des 18 filles est 12,5 et celle des 22 garçons est 10,5. Calcule la moyenne de la classe.
- 3) On ajoute 2 points à toutes les notes d'une série. Que deviennent la moyenne et l'écart-type ? Et si on multiplie toutes les notes par 1,5 ?

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Retrouver des effectifs manquants

Une série a pour valeurs 1, 2, 3, 4, 5 avec les effectifs 4, a , 9, b , 4. L'effectif total est 30 et la moyenne est $\frac{89}{30}$. Détermine a et b , puis calcule la médiane et l'écart-type.

Exercice 6 — Comparer deux séries

Deux classes de 25 élèves ont obtenu les notes suivantes :

Note	8	10	12	14	16
Classe A	3	5	9	5	3
Classe B	8	3	3	3	8

Calcule la moyenne, la médiane et l'écart-type de chaque classe. Quelle classe est la plus homogène ? Justifie.

Situations complexes**Situation complexe 15.1** Moyenne · médiane · écart-type · diagramme**La pluviométrie à Bamako****1 · Contexte**

Un groupement de maraîchers de Baguineda veut organiser ses cultures selon les pluies. Le président dispose des hauteurs de pluie mensuelles relevées une année à Bamako.

2 · Support

Hauteurs de pluie (en mm) de janvier à décembre : 0 ; 0 ; 3 ; 18 ; 60 ; 135 ; 230 ; 290 ; 190 ; 50 ; 4 ; 0.

3 · Fonction

Tu es le secrétaire du groupement. Tu présentes une analyse claire des pluies.

4 · Consignes

- 1 Représente ces données par un diagramme en bâtons (mois en abscisse). Calcule la hauteur totale annuelle et la moyenne mensuelle.
- 2 Détermine la médiane des hauteurs mensuelles. Pourquoi est-elle si différente de la moyenne ?
- 3 Calcule l'écart-type (arrondi au mm). Quels mois dépassent la moyenne ? Quelle part (en %) de la pluie annuelle tombe de juin à septembre ?

Situation complexe 15.2 Comparaison de deux séries**Les deux variétés de coton****1 · Contexte**

La CMDT teste deux variétés de coton à Koutiala. Le responsable doit recommander une variété aux producteurs : il veut un bon rendement, mais aussi un rendement régulier.

2 · Support

Rendements (en tonnes par hectare) mesurés sur 10 parcelles pour chaque var-

été : Variété A : 1,2 ; 1,4 ; 1,3 ; 1,5 ; 1,4 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,6 ; 1,2 ; 1,5. Variété B : 0,8 ; 1,9 ; 1,1 ; 2,0 ; 1,0 ; 1,7 ; 0,9 ; 1,8 ; 1,2 ; 1,6.

3 • Fonction

Tu es technicien agricole stagiaire. Tu rédiges une note de recommandation.

4 • Consignes

- ❶ Calcule la moyenne et la médiane du rendement de chaque variété.
- ❷ Calcule l'écart-type de chaque variété (arrondi au centième).
- ❸ Quelle variété recommandes-tu à un petit producteur qui veut éviter les mauvaises années ? Justifie.

Exemple résolu : histogramme, polygone des effectifs cumulés, médiane

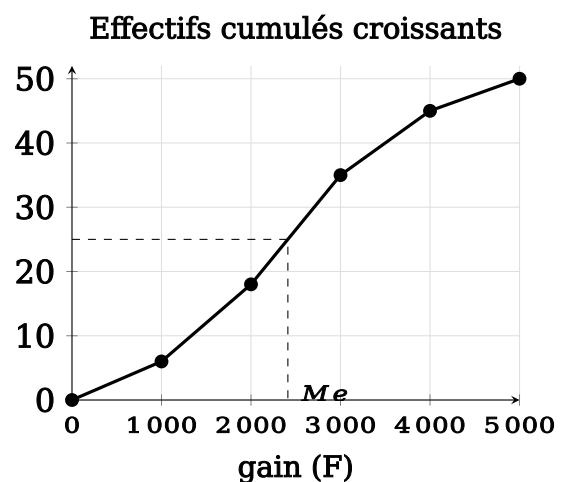
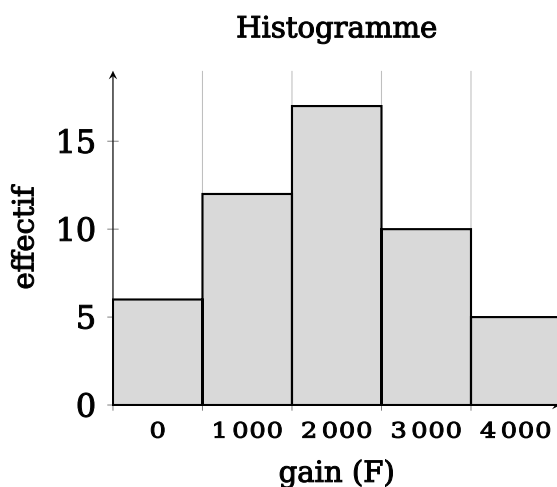
Exemple résolu — gains journaliers de 50 vendeurs

Énoncé. On reprend la série des gains journaliers de 50 vendeurs (classes de 1 000 F d'amplitude, effectifs 6 ; 12 ; 17 ; 10 ; 5). Construis l'histogramme et le polygone des effectifs cumulés croissants, puis calcule la moyenne, l'écart-type et la médiane.

1. Tableau

Classe	[0 ; 1000[	[1000 ; 2000[	[2000 ; 3000[	[3000 ; 4000[	[4000 ; 5000[	Total
Centre c_i	500	1 500	2 500	3 500	4 500	
n_i	6	12	17	10	5	50
E.C.C.	6	18	35	45	50	

2. Graphiques



3. Moyenne et écart-type

$$\bar{x} = \frac{6 \times 500 + 12 \times 1\,500 + 17 \times 2\,500 + 10 \times 3\,500 + 5 \times 4\,500}{50} = \frac{121\,000}{50} =$$

$$2\,420 \text{ F. } V = \frac{\sum n_i c_i^2}{50} - \bar{x}^2 = \frac{358\,500\,000}{50} - 2\,420^2 = 1\,313\,600, \text{ donc } \sigma \approx 1\,146 \text{ F.}$$

4. Médiane par interpolation

La moitié de l'effectif est 25 ; elle est atteinte dans la classe [2 000 ; 3 000[(les effectifs cumulés passent de 18 à 35). Sur ce segment du polygone : $Me = 2\,000 + 1\,000 \times \frac{25 - 18}{35 - 18} = 2\,000 + \frac{7\,000}{17} \approx 2\,412 \text{ F.}$

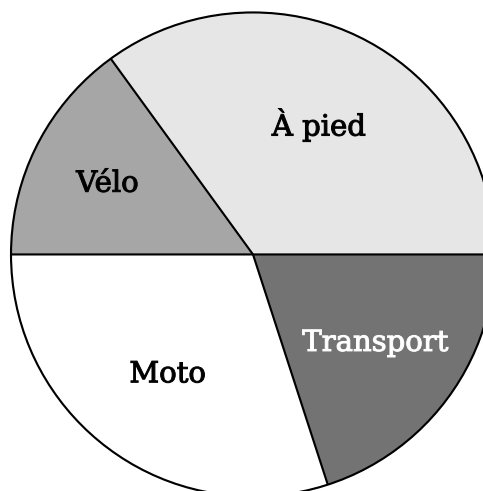
Exemple résolu — diagramme circulaire et diagramme en bâtons

Énoncé. Dans un lycée de 800 élèves : à pied 35 %, à vélo 15 %, en moto 30 %, en transport en commun 20 %. Calcule les effectifs, les angles et construis le diagramme circulaire.

1. Effectifs et angles

Moyen	À pied	Vélo	Moto	Transport en commun
Fréquence	35 %	15 %	30 %	20 %
Effectif	280	120	240	160
Angle	126°	54°	108°	72°

2. Diagramme



Exercices complémentaires

Exercice 7 — Les salaires d'une entreprise

Une entreprise de Bamako emploie 40 personnes. Les salaires mensuels (en milliers de FCFA) sont répartis ainsi :

Salaire	[50 ; 100[	[100 ; 150[	[150 ; 200[	[200 ; 300[	[300 ; 500[
Effectif	8	14	10	6	2

- 1) Les classes ont-elles la même amplitude ? Comment construire correctement l'histogramme ? Construis-le.

- 2) Calcule le salaire moyen et l'écart-type ; détermine la médiane par interpolation.
- 3) Pourquoi la moyenne est-elle supérieure à la médiane ?

Exercice 8 — Fréquences cumulées

Le tableau donne les âges des 200 habitants d'un hameau :

Âge	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[
Effectif	56	48	54	30	12

- 1) Calcule les fréquences et les fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
- 2) Quel pourcentage d'habitants a moins de 20 ans ? au moins 40 ans ?
- 3) Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes et détermine graphiquement la médiane.

Exercice 9 — Moyenne et écart-type transformés

Les notes d'un devoir ont pour moyenne 9 et pour écart-type 3. Le professeur décide de transformer chaque note x en $y = 1,2x + 1$.

- 1) Calcule la nouvelle moyenne et le nouvel écart-type.
- 2) Un élève avait 7. Quelle est sa nouvelle note ? Est-il toujours en dessous de la moyenne ?

Devoir de synthèse — Séquence 15

Statistique

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (10 points) — Série discrète

Le nombre d'enfants par famille dans un quartier de Kati est donné par le tableau :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de familles	4	6	10	12	8	6	4

- 1) Quel est le caractère étudié ? Est-il discret ou continu ? Quelle est la population ? (1,5 pt)
- 2) Calcule les fréquences et les effectifs cumulés croissants ; représente la série par un diagramme en bâtons. (2,5 pt)
- 3) Détermine le mode, la médiane et la moyenne. (3 pt)
- 4) Calcule la variance et l'écart-type. (3 pt)

Exercice 2 (10 points) — Série continue

On a mesuré la taille (en cm) de 40 élèves :

Taille	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Effectif	4	8	14	10	4

- 1) Construis l'histogramme de cette série. (2 pt)
- 2) Calcule la taille moyenne et l'écart-type. (3 pt)
- 3) Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et détermine la médiane (graphiquement et par le calcul). (3 pt)
- 4) Quel pourcentage des élèves mesure au moins 165 cm ? (2 pt)

Compositions

Sujets de 3 heures

Trois sujets trimestriels et deux sujets d'examen de fin d'année

Sujet de composition n° 111^e Sciences — Premier trimestre (applications, polynômes, équations et inéquations)Durée : 3 heures · Coefficient 4 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — ApplicationsOn considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 4x + 1$ et $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$.

- 1) Écris $f(x)$ sous forme canonique. f est-elle injective ? surjective ? (1,5 pt)
- 2) Détermine $f([0; 3])$ et $f^{-1}([-2; 1])$. (2 pt)
- 3) Montre que la restriction g de f à $[2; +\infty[$ est une bijection sur un intervalle à préciser et donne g^{-1} . (1,5 pt)
- 4) Montre que h est bijective et détermine h^{-1} . (1 pt)

Exercice 2 (7 points) — Polynômes, équations et inéquationsSoit $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

- 1) Calcule $P(1)$ et $P(-1)$; déduis-en que $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + ax + b)$ et détermine a et b . (2 pt)
- 2) Factorise complètement $P(x)$ et résous $P(x) = 0$. (1 pt)
- 3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{P(x)}{x^2 - 4} \leq 0$. (2 pt)
- 4) Résous dans $\mathbb{R} : \sqrt{x+5} = x-1$ et $\sqrt{x^2 - 3x} < x-1$. (2 pt)

Exercice 3 (7 points) — Équation paramétrique et problème

- 1) On considère $(E_m) : (m+2)x^2 - 2(m-1)x + m-4 = 0$.
 - a) Résous (E_m) pour $m = -2$. (0,5 pt)
 - b) Pour $m \neq -2$, montre que le discriminant réduit vaut 9 et résous (E_m) . (2 pt)
 - c) Discute, suivant m , le signe des racines. (1,5 pt)
 - d) Détermine m pour que 2 soit compris entre les racines. (1 pt)
- 2) Un terrain rectangulaire a pour périmètre 34 m et pour diagonale 13 m. Calcule ses dimensions. (2 pt)

Sujet de composition n° 2

11^e Sciences — Deuxième trimestre (trigonométrie,
limites, dérivation, étude de fonctions)

Durée : 3 heures · Coefficient 4 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Trigonométrie

- 1) Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calcule $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. (1,5 pt)
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$; donne les solutions appartenant à $[0; \pi]$. (2,5 pt)
- 3) Résous dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $2 \cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0$. (2 pt)

Exercice 2 (5 points) — Limites et continuité

- 1) Calcule : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 2x}$. (3 pt)
- 2) Soit $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$. Détermine a pour que f soit continue en 0. (2 pt)

Problème (9 points) — Étude d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D et les limites de f aux bornes de D . (1,5 pt)
- 2) Montre que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$. Déduis-en les asymptotes de $(\mathcal{C})$ et la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. (2 pt)
- 3) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f . (2 pt)
- 4) Montre que le point $\Omega(1; 0)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. Donne la tangente (T) au point d'abscisse 3. (1,5 pt)
- 5) Trace $(\mathcal{C})$, ses asymptotes et (T) . Discute graphiquement, suivant m , le nombre de solutions de $f(x) = m$. (2 pt)

Sujet de composition n° 3

11^e Sciences — Troisième trimestre (suites, dénombrement, probabilités, géométrie, statistique)

Durée : 3 heures · Coefficient 4 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Suites

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.

- 1) Calcule u_1 et u_2 . Montre par récurrence que $u_n < 10$ pour tout n . (1,5 pt)
- 2) On pose $v_n = u_n - 10$. Montre que (v_n) est géométrique ; exprime u_n en fonction de n . (2 pt)
- 3) Étudie le sens de variation et la limite de (u_n) . (1,5 pt)

Exercice 2 (5 points) — Dénombrement et probabilités

Un sac contient 5 jetons rouges numérotés de 1 à 5 et 3 jetons verts numérotés de 1 à 3. On tire simultanément deux jetons.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ? (1 pt)
- 2) Calcule la probabilité des événements : A « les deux jetons ont la même couleur » ; B « les deux jetons portent le même numéro » ; C « la somme des numéros est 4 » ; D « au moins un jeton est vert ». (4 pt)

Exercice 3 (6 points) — Géométrie plane

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 0)$, $B(5; 2)$ et $C(3; 6)$.

- 1) Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; quelle est la nature du triangle ABC ? Calcule son aire. (2 pt)
- 2) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et déduis-en une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. (1,5 pt)
- 3) Calcule les coordonnées du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$. (1 pt)
- 4) Quelle rotation de centre B transforme A en C ? Donne son expression analytique. (1,5 pt)

Exercice 4 (4 points) — Statistique

Les âges des 20 joueurs d'une équipe de football de quartier sont : 16 (2 joueurs), 17 (5), 18 (6), 19 (4), 20 (3).

- 1) Calcule l'âge moyen, la médiane et le mode. (2 pt)
- 2) Calcule la variance et l'écart-type. (2 pt)

Sujet de composition n° 411^e Sciences — Examen de fin d'année — sujet A

Durée : 3 heures · Coefficient 4 · Barème : 20 points
 Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (4 points) — Polynôme, équation irrationnelle

Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

- 1) Vérifie que 1 est racine de P et factorise $P(x)$. (1,5 pt)
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$. (1,5 pt)
- 3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x+3} = x$. (1 pt)

Exercice 2 (4 points) — Trigonométrie

- 1) Résous dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0$ (pose $X = \sin x$). (2,5 pt)
- 2) Résous dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$ et représente les solutions sur le cercle trigonométrique. (1,5 pt)

Exercice 3 (4 points) — Dénombrement et probabilités

Une classe compte 20 élèves dont 8 filles. On tire au sort 3 délégués.

- 1) Combien de groupes de 3 délégués sont possibles ? (1 pt)
- 2) Calcule la probabilité d'avoir exactement une fille ; au moins une fille ; trois délégués du même sexe. (3 pt)

Problème (8 points) — Étude de fonction

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Détermine D_f , les limites aux bornes et écris $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$. (2 pt)
- 2) Précise les asymptotes de $(\mathcal{C})$ et la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. (1,5 pt)
- 3) Calcule $f'(x)$, dresse le tableau de variations et donne les extremums relatifs. (2 pt)
- 4) Montre que $\Omega(1; 3)$ est centre de symétrie et donne la tangente au point d'abscisse 3. (1,5 pt)
- 5) Trace $(\mathcal{C})$. (1 pt)

Sujet de composition n° 511^e Sciences — Examen de fin d'année — sujet B

Durée : 3 heures · Coefficient 4 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Suites

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

- 1) Calcule u_1, u_2 . Montre par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n . (1,5 pt)
- 2) Montre que $v_n = u_n - 3$ est géométrique ; exprime u_n en fonction de n . (2 pt)
- 3) Étudie la limite de (u_n) et calcule $u_0 + u_1 + \dots + u_n$. (1,5 pt)

Exercice 2 (6 points) — Géométrie plane

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1 ; 1)$, $B(3 ; 3)$ et $C(1 ; -3)$.

- 1) Montre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A . (1,5 pt)
- 2) Donne une équation de son cercle circonscrit (Γ) . (1,5 pt)
- 3) Calcule les coordonnées du barycentre G de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$. (1 pt)
- 4) Détermine l'ensemble des points M tels que $MB^2 + MC^2 = 40$. (2 pt)

Exercice 3 (4 points) — Géométrie dans l'espace

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2. On utilise le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

- 1) Donne les coordonnées des sommets et calcule AG . (1,5 pt)
- 2) Montre que (AG) est orthogonale à (BD) et à (BE) ; que peux-tu en déduire ? (2,5 pt)

Exercice 4 (5 points) — Statistique

Notes d'un devoir dans une classe de 30 élèves : 5 (3 élèves), 8 (7), 10 (10), 12 (6), 15 (4).

- 1) Calcule la moyenne, la médiane et le mode. (2,5 pt)
- 2) Calcule la variance et l'écart-type. (1,5 pt)
- 3) Quel pourcentage d'élèves a au moins la moyenne de la classe ? (1 pt)

Éléments de correction

Situations complexes et devoirs

Réponses essentielles pour l'autocorrection
et la préparation des séances de remédiation

Corrigés des situations complexes

Séquence 1 — Les applications

Situation 1.1 — La facture d'électricité

- ❶ $C(80) = 1\,500 + 8\,000 = 9\,500$ F ; $C(150) = 1\,500 + 10\,000 + 50 \times 130 = 18\,000$ F.
Pour $x > 100$: $C(x) = 11\,500 + 130(x - 100) = 130x - 1\,500$.
- ❷ Les deux formules donnent 11 500 en $x = 100$; C est continue et strictement croissante, $C(0) = 1\,500$ et $C(x) \rightarrow +\infty$: bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1\,500; +\infty[$.
 $C^{-1}(y) = \frac{y - 1\,500}{100}$ si $1\,500 \leq y \leq 11\,500$; $C^{-1}(y) = \frac{y + 1\,500}{130}$ si $y > 11\,500$.
- ❸ $24\,500 > 11\,500$, donc $x = \frac{26\,000}{130} = 200$ kWh. Les courbes sont symétriques par rapport à $y = x$.

Situation 1.2 — La coopérative de karité

- ❶ $f(50) = 20$ kg de beurre, bénéfice $g(20) = 28\,000$ F. $(g \circ f)(x) = 1\,500 \times 0,4x - 2\,000 = 600x - 2\,000$.
- ❷ Fonction affine strictement croissante : bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-2\,000; +\infty[$;
réciproque $y \mapsto \frac{y + 2\,000}{600}$.
- ❸ $600x - 2\,000 = 40\,000 \Leftrightarrow x = 70$ kg. $(g \circ f)^{-1}([0; +\infty[) = \left[\frac{10}{3}; +\infty[\right]$: il faut plus de 3,33 kg d'amandes pour ne pas perdre d'argent.

Séquence 2 — Fonctions polynômes

Situation 2.1 — La boîte du ferblantier

- ❶ Base $(20 - 2x)(12 - 2x)$, hauteur x ; il faut $0 < x < 6$.
- ❷ $4x(10 - x)(6 - x) = 256 \Leftrightarrow x^3 - 16x^2 + 60x - 64 = 0$; $8 - 64 + 120 - 64 = 0$;
 $x^3 - 16x^2 + 60x - 64 = (x - 2)(x^2 - 14x + 32)$.
- ❸ $x^2 - 14x + 32 = 0$ donne $x = 7 \pm \sqrt{17}$; seule $7 - \sqrt{17} \approx 2,9$ cm est dans $]0; 6[$.
Deux découpes : 2 cm ou $7 - \sqrt{17} \approx 2,9$ cm.

Situation 2.2 — La pyramide de briques

- ❶ $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ briques.
- ❷ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1\,015 \Leftrightarrow 2n^3 + 3n^2 + n = 6\,090$.
- ❸ $2 \times 2\,744 + 3 \times 196 + 14 = 6\,090$; $2n^3 + 3n^2 + n - 6\,090 = (n - 14)(2n^2 + 31n + 435)$ et le second facteur n'a pas de racine ($\Delta < 0$). 14 couches ; la base compte $14^2 = 196$ briques.

Séquence 3 — Équations et inéquations

Situation 3.1 — La parcelle de l'Hippodrome

- ❶ Pythagore : $L^2 + \ell^2 = 34^2 = 1\,156$; $(L + \ell)^2 = 1\,156 + 960 = 2\,116$, donc $L + \ell = 46$.
- ❷ L et ℓ sont racines de $X^2 - 46X + 480 = 0$: $\Delta' = 49$, $X = 23 \pm 7$; $L = 30$ m, $\ell = 16$ m.
- ❸ Périmètre 92 m, grillage $92 - 4 = 88$ m, coût $88 \times 2\,500 = 220\,000$ F.

Situation 3.2 — L'excursion à Kangaba

- ❶ $np = 21\,600$ et $(n + 30)(p - 20) = 24\,000$.
- ❷ En développant : $30p - 20n = 3\,000$, d'où $n = 1,5p - 150$; puis $p(1,5p - 150) = 21\,600 \Leftrightarrow p^2 - 100p - 14\,400 = 0$; $\Delta = 67\,600 = 260^2$, $p = 180$ (l'autre racine est négative).
- ❸ $p = 180$ F et $n = 120$ élèves ; vérification : $120 \times 180 = 21\,600$ et $150 \times 160 = 24\,000$.

Séquence 4 — Trigonométrie

Situation 4.1 — La pirogue

- ❶ $\vec{v}_c \left(4 \cos \frac{5\pi}{12} ; -4 \sin \frac{5\pi}{12} \right)$.
- ❷ $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- ❸ $\vec{v}_r (8 + \sqrt{6} - \sqrt{2} ; -(\sqrt{6} + \sqrt{2}))$; $\|\vec{v}_r\|^2 = 80 + 16(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\|\vec{v}_r\| \approx 9,8$ km/h ; durée $\approx \frac{60}{9,83} \approx 6,1$ h : oui, il arrive en moins de 8 heures.

Situation 4.2 — Les panneaux solaires

- ❶ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$; cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$; sinus $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ❷ Écart option A : 0 ; option B : $\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$. On conseille l'option A.
- ❸ Le panneau incliné de $\frac{\pi}{4}$ reçoit les rayons les plus proches à 10 h ; angle entre 9 h et 11 h : $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Séquence 5 — Équations trigonométriques

Situation 5.1 — La file d'attente

- ❶ Période 7 jours (une semaine). Maximum 25 m pour $t = 1$ (lundi à minuit) ; minimum 5 m pour $t = 4,5$ (jeudi à midi).
- ❷ $L(t) \geq 20 \iff \cos\left(\frac{2\pi}{7}(t-1)\right) \geq \frac{1}{2} \iff t \in \left[0; \frac{13}{6}\right] \cup \left[\frac{41}{6}; 7\right]$: éviter la fin du dimanche, le lundi et le début du mardi.
- ❸ $L(t) \leq 12 \iff \cos\left(\frac{2\pi}{7}(t-1)\right) \leq -0,3 \iff t \in [3,09; 5,91]$ environ (du mercredi au vendredi).

Situation 5.2 — La rampe d'accès

- ❶ $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
- ❷ $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$; dans $]0; \frac{\pi}{2}[$: $x = \frac{\pi}{12}$.
- ❸ L'inclinaison vaut exactement 15° : la rampe est à la limite autorisée, donc accessible.

Séquence 6 — Limites et continuité**Situation 6.1 — La rupture collective**

- ❶ $f(5) = 75\,000$ F ; $f(20) = 150\,000$ F ; pour $x \neq 10$, $f(x) = 5\,000(x+10)$, d'où $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 100\,000$.
- ❷ La limite est finie : prolongement $g(x) = 5\,000(x+10)$, l'application doit afficher 100 000 F ; g est affine.
- ❸ $c(x) = 5\,000 + \frac{50\,000}{x}$ diminue quand x augmente ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = 5\,000$: chaque participant paiera toujours plus de 5 000 F.

Situation 6.2 — Le tarif des colis

- ❶ $T(10) = 5\,000$ et $\lim_{x \rightarrow 10^+} T(x) = 7\,000$: T n'est pas continue en 10, d'où un saut de 2 000 F.
- ❷ $10a + 1\,000 = 5\,000 \iff a = 400$.
- ❸ $T_a(25) = 11\,000$ F ; $400x + 1\,000 = 13\,000 \iff x = 30$ kg.

Séquence 7 — Dérivation

Situation 7.1 — La moto-taxi

- ❶ $d(1) = 20$ km ; vitesse moyenne 20 km/h.
- ❷ $d'(t) = -120t^2 + 120t = 120t(1 - t)$, maximale pour $t = \frac{1}{2}$: 30 km/h.
- ❸ $d'(t) > 20 \Leftrightarrow 6t^2 - 6t + 1 < 0 \Leftrightarrow t \in \left] \frac{3-\sqrt{3}}{6} ; \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right[$: durée $\frac{\sqrt{3}}{3}$ h ≈ 35 min. Il n'a jamais dépassé 60 km/h.

Situation 7.2 — L'atelier de foyers améliorés

- ❶ $C'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0$: C croissante. $C_m(x) = 3x^2 + 9x + 7$, proche de $C'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.
- ❷ $B(x) = 300x - C(x) = -x^3 - 3x^2 + 297x - 200$; $B'(x) = -3(x-9)(x+11)$: B croît sur $[0; 9]$, décroît sur $[9; 12]$.
- ❸ 9 foyers ; $B(9) = 1\,501$, soit un bénéfice maximal de 1 501 000 F.

Séquence 8 — Suites numériques**Situation 8.1 — L'épargne d'Awa**

- ❶ Suite arithmétique de raison 1 500 : $e_n = 1\,500n + 3\,500$; $e_{12} = 21\,500$ F.
- ❷ $S_{12} = \frac{12(5\,000+21\,500)}{2} = 159\,000$ F ; $S_n = \frac{n}{2}(10\,000 + 1\,500(n-1)) = 750n^2 + 4\,250n$.
- ❸ $S_{17} = 289\,000 < 300\,000 \leq S_{18} = 319\,500$: au bout de 18 mois.

Situation 8.2 — La croissance de Kayes

- ❶ $p_n = 150\,000 \times 1,03^n$ (géométrique), $a_n = 150\,000 + 5\,000n$ (arithmétique) ; $p_{10} \approx 201\,587$, $a_{10} = 200\,000$; $p_{20} \approx 270\,917$, $a_{20} = 250\,000$.
- ❷ $1,03^n \geq 2$ pour $n \geq 24$: en 2049. Les deux suites tendent vers $+\infty$.
- ❸ $p_n > a_n$ à partir de $n = 8$, soit en 2033.

Séquence 9 — Dénombrement**Situation 9.1 — Le code secret**

- ❶ $10^4 - 10 = 9\,990$ codes autorisés ; $A_{10}^4 = 5\,040$ codes à chiffres distincts.
- ❷ Codes sans 0 : $9^4 = 6\,561$; avec au moins un 0 : $10\,000 - 6\,561 = 3\,439$, moins le code 0000 interdit : 3 438.
- ❸ $\frac{3}{9\,990} \approx 0,03\%$: le code est sûr s'il reste secret.

Situation 9.2 — La coupe interscolaire

- ❶ $C_8^2 = 28$ matchs ; 56 en aller-retour.
- ❷ $\frac{C_8^4}{2} = 35$ répartitions ; $2 \times 6 + 2 + 1 + 1 = 16$ matchs.
- ❸ $A_8^3 = 336$ podiums.

Séquence 10 — Étude de fonctions**Situation 10.1 — La briqueterie**

- ❶ $M(x) = x + 2 + \frac{100}{x}$; $M'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{(x-10)(x+10)}{x^2}$.
- ❷ M décroît sur $[1 ; 10]$ et croît sur $[10 ; 30]$; minimum $M(10) = 22$: produire 1 000 briques par jour, coût moyen 22 000 F la centaine.
- ❸ $M(x) - (x + 2) = \frac{100}{x} \rightarrow 0$: pour une grande production, le coût moyen augmente presque comme $x + 2$.

Situation 10.2 — Les tecks

- ❶ $h(0) = 2$ m ; $h(5) = 16$ m ; $h'(t) = \frac{140}{(t+5)^2} > 0$: h est croissante.
- ❷ $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 30$: un teck ne dépassera jamais 30 m.
- ❸ $h(t) = 20 \Leftrightarrow 30t + 10 = 20t + 100 \Leftrightarrow t = 9$: coupe au bout de 9 ans.

Séquence 11 — Vecteurs, barycentre, produit scalaire**Situation 11.1 — Le champ de Bougouni**

- ❶ $\cos \theta = \frac{50^2 + 80^2 - 70^2}{2 \times 50 \times 80} = \frac{1}{2}$, donc $\theta = 60^\circ$.
- ❷ Aire = $\frac{1}{2} \times 50 \times 80 \times \sin 60^\circ = 1\,000\sqrt{3} \approx 1\,732$ m².
- ❸ $0,1732 \times 25 \approx 4,3$ kg : un sac suffit, 17 500 F.

Situation 11.2 — Le forage des trois villages

- ❶ $G(1,8 ; 0,9)$.
- ❷ En introduisant G dans chaque carré, les doubles produits s'annulent : $S(M) = 1\,000MG^2 + S(G)$, minimale pour $M = G$.
- ❸ $GA \approx 2,01$ km ; $GB \approx 4,30$ km ; $GC \approx 8,30$ km : le village C est le plus éloigné.

Séquence 12 — Transformations

Situation 12.1 — Le plan du marché

- ❶ Une similitude (homothétie) de rapport $\frac{1}{500}$; marché 120 m sur 75 m ; boutique 5 m sur 5 m.
- ❷ Aire réelle $9\,000 \text{ m}^2$; sur le plan $360 \text{ cm}^2 = 0,036 \text{ m}^2 = \frac{9\,000}{500^2}$.
- ❸ Rapport $\frac{4}{500} = \frac{1}{125}$; aire de la maquette $360 \times 16 = 5\,760 \text{ cm}^2$.

Situation 12.2 — Le logo des tisserands

- ❶ $OA = AB = BC = CO = \sqrt{5}$; $r : x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$.
- ❷ $r(A) \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right), r(B)(-2; 2\sqrt{3}), r(C) \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} + \frac{1}{2} \right)$;
 $r \circ r(A) \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right), r \circ r(B)(-2; -2\sqrt{3}),$
 $r \circ r(C) \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right).$
- ❸ Aire d'un losange $\frac{4 \times 2}{2} = 4$; aire totale 12 unités d'aire.

Séquence 13 — Probabilités

Situation 13.1 — Le contrôle des sacs de riz

- ❶ $C_{20}^3 = 1\,140$ prélèvements équiprobables (choix au hasard).
- ❷ $P(\text{aucun}) = \frac{C_{16}^3}{1\,140} = \frac{28}{57} \approx 0,49$; $P(\text{exactement un}) = \frac{4 \times C_{16}^2}{1\,140} = \frac{8}{19} \approx 0,42$.
- ❸ $P(\text{refus}) = 1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57} \approx 0,51$: un lot contenant 20 % de sacs défectueux est accepté une fois sur deux ; le contrôle est insuffisant.

Situation 13.2 — La tombola

- ❶ 20 numéros se terminent par 7 ; 8 sont multiples de 25 ; aucun multiple de 25 ne se termine par 7 : événements incompatibles.
- ❷ $P = \frac{20+8}{200} = 0,14$.
- ❸ Recette 100 000 F ; $P = 1 - \frac{C_{180}^4}{C_{200}^4} \approx 0,35$.

Séquence 14 — Géométrie dans l'espace

Situation 14.1 — Le hangar de coton

- ❶ $E(20; 0; 6)$, $G(0; 12; 6)$, $M(20; 6; 0)$; $OF = \sqrt{580} \approx 24,08$ m ; $MD = \sqrt{472} \approx 21,73$ m.
- ❷ $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{MD} = -400 - 72 + 36 = -436 \neq 0$: non orthogonales ; angle des droites $\approx 34^\circ$.
- ❸ Non : $\overrightarrow{OF}$ n'est pas colinéaire au vecteur vertical $(0; 0; 1)$. Sa projection sur le sol est $[OB]$, de longueur $\sqrt{544} \approx 23,32$ m.

Situation 14.2 — La sculpture

- ❶ $BA' = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $AA' = \sqrt{9-3} = \sqrt{6} \approx 2,45$ m.
- ❷ Associativité : G est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 3)$, d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$; hauteur $GA' = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,61$ m.
- ❸ 6 arêtes de 3 m : 18 m de barre.

Séquence 15 — Statistique**Situation 15.1 — La pluviométrie**

- ❶ Total 980 mm ; moyenne $\approx 81,7$ mm.
- ❷ Médiane $\frac{18+50}{2} = 34$ mm : la moyenne est tirée vers le haut par les quelques mois très pluvieux.
- ❸ $\sigma \approx 99$ mm ; juin, juillet, août et septembre dépassent la moyenne ; ils apportent $\frac{845}{980} \approx 86$ % de la pluie annuelle.

Situation 15.2 — Les deux variétés de coton

- ❶ A : moyenne 1,38 t/ha, médiane 1,4 ; B : moyenne 1,40, médiane 1,4.
- ❷ $\sigma_A \approx 0,12$; $\sigma_B \approx 0,42$.
- ❸ Rendements moyens presque égaux, mais A est beaucoup plus régulière : on la recommande au petit producteur.

Éléments de correction des devoirs et des compositions

Devoir 1 — Les applications

Ex. 1. $D_f = \mathbb{R}^*$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$; $(g \circ f)(2) = 5$; $(f \circ g)(0) = \frac{1}{16}$; $(f \circ g)(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-4)^2}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1-4x^2}{1-x^2}$; $f^{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}$; $g([0; 3] \setminus \{1\}) =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [4; +\infty[$. **Ex. 2.** $f(x) = -3x + 3$ si $x \leq \frac{1}{2}$; $x + 1$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$; $3x - 5$ si $x \geq 3$. $f([-1; 1]) = [\frac{3}{2}; 6]$; $f^{-1}([2; 6]) = [-1; \frac{1}{3}] \cup [1; \frac{11}{3}]$. **Ex. 3.** Solution $x = \sqrt{2y - 1}$ si $y \geq \frac{1}{2}$, aucune sinon; g injective, $g(\mathbb{R}_+) = [\frac{1}{2}; +\infty[$; $f^{-1}(x) = \sqrt{2x - 1}$.

Devoir 2 — Fonctions polynômes

Ex. 1. $P(3) = 0$; $P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2) = (x - 3)(2x - 1)(x + 2)$; $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; 3]$; $2x^6 - 3x^4 - 11x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \{3; \frac{1}{2}\}$; $x \in \{\pm\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. **Ex. 2.** $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)$: 1 est zéro d'ordre 3; quotient $x^2 - 2x$, reste $3x - 2$. **Ex. 3.** 6, 11, 6; $\sum \alpha^2 = 36 - 22 = 14$; $\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{11}{6}$; racines 1, 2, 3.

Devoir 3 — Équations et inéquations

Ex. 1. $\{-2; -\frac{4}{3}\}$; $\{-1\}$; $\{-\sqrt{2}; -\sqrt{3}\}$; $] -4; 4 - \sqrt{15}] \cup [4 + \sqrt{15}; +\infty[$; $[4; 5]$; $\{\pm 3; \pm\sqrt{2}\}$; $\emptyset$. **Ex. 2.** $\Delta = 4m - 3$: deux racines si $m \geq \frac{3}{4}$; $P = m^2 + 1 > 0$ et $S = -(2m + 1) < 0$: racines négatives. $\alpha^2 + \beta^2 = 29 \Leftrightarrow m = 3$ (car $m = -5 < \frac{3}{4}$), racines -2 et -5. $|\alpha - \beta| = 1 \Leftrightarrow \Delta = 1 \Leftrightarrow m = 1$, racines -1 et -2. **Ex. 3.** $\Delta = (a^2 + 2)^2 - 8a^2 = (a^2 - 2)^2$; solutions a et $\frac{2}{a}$; racine double si $a = \pm\sqrt{2}$.

Devoir 4 — Trigonométrie

Ex. 1. Mesure principale $\frac{5\pi}{6}$ (autres: $\frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}$); 27° ; $-\frac{17\pi}{4}$: $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{143\pi}{6}$: $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = -\frac{1}{2}$; $-\frac{97\pi}{3}$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $C = \cos x - \sin x$. **Ex. 2.** $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $A + B = 4$, $A - B = 0$, $A = B = 2$. **Ex. 3.** $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $f(x) = 2\sin 2x(\cos x + 1) = 4\sin 2x \cos^2 \frac{x}{2}$.

Devoir 5 — Équations trigonométriques

Ex. 1. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; $x = 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. **Ex. 2.** $] -\pi; -\frac{5\pi}{6}[\cup] -\frac{\pi}{6}; \pi]$; $[\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}] \cup [\frac{13\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}]$; $[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$. **Ex. 3.** $(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$, $(\frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{8})$, $(\frac{11\pi}{8}, \frac{9\pi}{8})$, $(\frac{15\pi}{8}, \frac{13\pi}{8})$.

Devoir 6 — Limites et continuité

Ex. 1. $-\infty$ et $-\frac{1}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $-\infty$ et $+\infty$. **Ex. 2.** $f(x) = x - 3$ pour $x \neq 1$, prolongement par la valeur -2; $a = 1$ et $b = 5$. **Ex. 3.** Les deux limites en 0 valent $0 = f(0)$: f est continue; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$; $0 \leq \frac{1 - \cos x}{|x|} \leq \frac{2}{|x|}$ donne $\lim_{x \rightarrow \infty} f = 0$.

Devoir 7 — Dérivation

Ex. 1. $f'(1) = -\frac{1}{2}$; $g'_g(3) = -3$, $g'_d(3) = 3$: point anguleux ; tangente à $\tan$ en $\frac{\pi}{4}$: $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$. **Ex. 2.** $f'_1 = 3(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$; $f'_2 = \frac{14}{(2x+4)^2}$; $f'_3 = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $f'_4 = \sin x + x \cos x - 2 \sin 2x$. **Ex. 3.** Maximum relatif $f(-1) = -2$, minimum relatif $f(3) = 6$; (T) : $y = -3x - 3$; tangentes horizontales en -1 et 3 ; parallèles à $y = -3x$ en 0 et en 2 .

Devoir 8 — Suites

Ex. 1. $r = 3$, $u_0 = 1$, $S = 651$; $q = 3$, $v_0 = \frac{4}{3}$, somme $\frac{4372}{3}$. **Ex. 3.** $u_1 = 16$, $u_2 = 13,6$, $u_3 = 12,16$; $v_n = 10 \times 0,6^n$; $u_n = 10 + 10 \times 0,6^n$, limite 10 ; $S_n = 10(n+1) + 25(1 - 0,6^{n+1})$.

Devoir 9 — Dénombrement

Ex. 1. 336 ; 126 ; 45 ; $n = 9$. **Ex. 2.** $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$; $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ nombres, dont $60 + 48 = 108$ multiples de 5 ; $9^7 = 4\,782\,969$ numéros. **Ex. 3.** 120 ; $4 \times C_6^2 = 60$; $120 - 20 = 100$; $A_{10}^3 = 720$ et $4 \times 6 \times 5 = 120$; avec remise 1 000 et 144.

Devoir 10 — Étude de fonctions

Ex. 1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$; asymptotes $x = -\frac{5}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$; $g'(x) = \frac{3}{(2x+5)^2} > 0$. **Problème.** $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$; asymptote $y = x$ (courbe au-dessus si $x > -1$) ; $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$; maximum relatif $f(-3) = -5$, minimum relatif $f(1) = 3$; (T) : $y = -3x + 4$; $f(x) = m$: deux solutions si $m < -5$ ou $m > 3$, une si $m = -5$ ou $m = 3$, aucune sinon.

Devoir 11 — Vecteurs, barycentre, produit scalaire

Ex. 1. $G(2; 5)$; $H(\frac{3}{2}; 0)$; cercle de centre H et de rayon 1. **Ex. 2.** $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EK} = 0$: rectangle (et isocèle) en E ; $EF = EK = 2\sqrt{5}$, $FK = 2\sqrt{10}$, aire 10 ; cercle $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 10$; distance $\sqrt{10}$. **Ex. 3.** Cercle de centre I et de rayon 5.

Devoir 12 — Transformations

Ex. 1. $t(A)(1; 4)$, $t(d) : 2x - y + 8 = 0$; $h : x' = 3x - 2$, $y' = 3y + 2$, $h(A)(4; 5)$, $h(d) : 2x - y + 15 = 0$; $r : x' = y$, $y' = -x$, $r(A)(1; -2)$; projections : $(0; y)$ et $(x - \frac{y}{2}; 0)$. **Ex. 2.** Homothétie de centre $(1; 2)$ et de rapport -2 ; rotation de centre $(1; 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; $s_2 \circ s_1 : (x; y) \mapsto (x+6; y)$, translation de vecteur $(6; 0)$.

Devoir 13 — Probabilités

Ex. 1. $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$; $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. **Ex. 2.** $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{3}{5}$; avec remise : $\frac{5}{9}$. **Ex. 3.** $\frac{210}{495} = \frac{14}{33}$; $1 - \frac{35}{495} = \frac{92}{99}$; $\frac{45}{495} = \frac{1}{11}$.

Devoir 14 — Géométrie dans l'espace

Ex. 1. $(IJ) \parallel (AB) \parallel (CD)$; intersection : la parallèle à (AD) passant par S ; section : trapèze $IJCD$. **Ex. 3.** $AB = \sqrt{13}$, $AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 5$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$; $K(\frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3})$, $G(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1)$; $H(1; \frac{3}{2}; -2)$.

Devoir 15 — Statistique

Ex. 1. Mode 3 ; médiane 3 ; moyenne 2,96 ; variance 2,7584 ; $\sigma \approx 1,66$. **Ex. 2.** Moyenne 162,75 cm ; $\sigma \approx 5,58$ cm ; médiane $160 + 5 \times \frac{20-12}{14} \approx 162,9$ cm ; 35 % mesurent au moins 165 cm.

Composition 1

$f(x) = (x-2)^2 - 3$, ni injective ni surjective ; $f([0; 3]) = [-3; 1]$; $f^{-1}([-2; 1]) = [0; 1] \cup [3; 4]$; $g^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+3}$ sur $[-3; +\infty[$; $h^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-3}$. $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$; $\frac{P(x)}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1] \cup]2; 3]$; $\sqrt{x+5} = x-1 \Leftrightarrow x = 4$; $\sqrt{x^2-3x} < x-1 \Leftrightarrow x \geq 3$. (E_m) : racines 1 et $\frac{m-4}{m+2}$ ($x = 1$ si $m = -2$) ; 2 entre les racines $\Leftrightarrow -8 < m < -2$; terrain 12 m sur 5 m.

Composition 2

$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$: $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi$; dans $[0; \pi]$: $\frac{\pi}{24}$ et $\frac{19\pi}{24}$; $(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Limites : 2 ; $\frac{1}{4}$; 2 ; $a = \frac{1}{2}$. Problème : asymptotes $x = 1$ et $y = x - 1$; $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; maximum relatif $f(0) = -2$, minimum relatif $f(2) = 2$; (T) : $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

Composition 3

$u_n = 10 - 8 \times 0,8^n$, croissante, limite 10. $C_8^2 = 28$; $P(A) = \frac{13}{28}$, $P(B) = \frac{3}{28}$, $P(C) = \frac{5}{28}$, $P(D) = \frac{9}{14}$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$: triangle rectangle isocèle en B , aire 10 ; $\widehat{BAC} = 45^\circ$; $G\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$; rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$: $x' = y + 3$, $y' = -x + 7$. Âge moyen 18,05 ; médiane et mode 18 ; variance 1,4475 ; $\sigma \approx 1,20$.

Composition 4

$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$; $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [1; 2]$; $\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow x = 3$. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$: $\sin x = 1$ ou $\frac{1}{2}$, d'où $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$; $\sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$. $C_{20}^3 = 1140$; $P(\text{une fille}) = \frac{8 \times 66}{1140} = \frac{44}{95}$; $P(\text{au moins une}) = 1 - \frac{220}{1140} = \frac{46}{57}$; $P(\text{même sexe}) = \frac{56+220}{1140} = \frac{23}{95}$. $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1}$; asymptotes $x = 1$ et $y = 2x + 1$; $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; maximum relatif $f(0) = -1$, minimum relatif $f(2) = 7$; tangente en 3 : $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Composition 5

$u_1 = \frac{7}{3}$, $u_2 = \frac{25}{9}$; $u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 3$; $u_0 + \dots + u_n = 3(n+1) - 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. $\overrightarrow{AB}(4; 2)$, $\overrightarrow{AC}(2; -4)$: produit scalaire nul et $AB = AC = 2\sqrt{5}$; (Γ) : $(x-2)^2 + y^2 = 10$; $G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 20$ avec $I(2; 0)$: l'ensemble est (Γ) . $G(2; 2; 2)$, $AG = 2\sqrt{3}$; $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$: (AG) est orthogonale au plan (BDE) . Moyenne 10,1 ; médiane et mode 10 ; variance $\approx 7,56$, $\sigma \approx 2,75$; $\frac{10}{30} \approx 33\%$ des élèves ont au moins la moyenne (notes 12 et 15).

Formulaire de 11^e Sciences

L'essentiel des formules de l'année, à avoir toujours sous la main.

Second degré

$ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ; $\Delta = b^2 - 4ac$; $\Delta' = b'^2 - ac$ si $b = 2b'$. Si $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta = 0$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; si $\Delta < 0$: pas de racine réelle. $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; forme canonique $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Signe : du signe de a sauf entre les racines.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
sin x	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
tan x	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	

Aussi : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Formules trigonométriques

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$;
 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$; $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$; $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$; $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$; $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$; $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$. $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Limites et dérivées

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}	$u + v$	$u' + v'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	uv	$u'v + uv'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sin x$	$\cos x$	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Suites, dénombrement, probabilités

Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$; somme = $\frac{\text{nb de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$. Géométrie : $u_n = u_0 q^n$; somme = $\text{premier} \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$. n^p (listes) ; $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (arrangements) ; $n!$ (permutations) ; $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (combinaisons). $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.

Géométrie et statistique

Barycentre : $x_G = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' (+zz')$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$; médiane : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$; distance point-droite $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Rotation de centre O : $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$; homothétie : $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$. Statistique : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum n_i x_i$; $V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$; $\sigma = \sqrt{V}$.

Cercle trigonométrique (à photocopier)

