

Second degré

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2008/2009

Table des matières

1	Polynômes du second degré	2
1.1	Définition	2
1.2	Forme canonique	2
1.3	Sens de variation	3
2	Équations du second degré	4
2.1	Discriminant – Application	4
2.2	Factorisation d'un trinôme du second degré	5
3	Inéquations du second degré	5
3.1	Étude préliminaire	5
3.2	Signe des polynômes du second degré	5

Liste des tableaux

1	Variations d'un trinôme du second degré	3
2	Parabole représentant un polynôme du second degré	6
3	Un exemple d'étude de signe.	6

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Activités : Activité 1¹ et 2² page 83 [Déclic]

1 Polynômes du second degré

1.1 Définition

Définition : On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f **définie sur $\mathbb{R}$** pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Remarque : On dit aussi dans ce cas que P est un trinôme du second degré.

Exemples :

1. $f(x) = 3x^2 - x + 1$ est un polynôme du second degré ($a = 3$; $b = -1$ et $c = 1$)
2. $g(x) = (3x - 2)(1 - x)$ est un polynôme du second degré :
En développant, on obtient : $g(x) = -3x^2 + 5x - 2$ ($a = -3$; $b = 5$ et $c = -2$)
3. $h(x) = -2(x + 1)^2 + 3$ est un polynôme du second degré :
En développant, on obtient : $h(x) = -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = -2x^2 - 4x + 1$ ($a = -2$; $b = -4$ et $c = 1$)
4. $h(x) = -3x^2$ est un polynôme du second degré ($a = -3$; $b = 0$ et $c = 0$)
5. Par contre, les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes du second degré :
 - $j : x \longrightarrow 3x - 1$ (car le coefficient de x^2 doit être non nul)
 - $k : x \longrightarrow \sqrt{x}$ (car cette fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}$)

1.2 Forme canonique

Propriété (admise) :

Tout polynôme du second degré peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette forme est appelée **forme canonique**.

Exemples :

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
Sans utiliser la formule ci-dessus, on a : $f(x) = (x - 1)^2$. On va vérifier qu'il s'agit bien de la forme canonique.
Ici : $a = 1$; $b = -2$ et $c = 1$. On a bien : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2} = 1$ et $\beta = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$
La forme canonique est donc bien : $f(x) = (x - 1)^2 + 0$.
2. $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$
Ici : $a = 2$; $b = -6$ et $c = 1$. On a : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \times 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $\beta = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{3}{2} + 1 = 2 \times \frac{9}{4} - 9 + 1 = \frac{9}{2} - 8 = -\frac{7}{2}$.
La forme canonique est donc : $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$.

Remarque : Pour un polynôme du second degré, il existe donc une forme réduite (celle de la définition), une forme canonique et (éventuellement) une forme factorisée. Suivant le problème posé, il faudra donc choisir entre ces formes.

1. De la parabole au trinôme $ax^2 + bx + c$.
2. Formes d'un polynôme du second degré.

Exercices : 12, 13 page 91³ – 17 page 91⁴ et 22, 23 page 92⁵ [Déclic]

1.3 Sens de variation d'un trinôme du second degré

Soit f un trinôme du second degré.

D'après la propriété du 1.2, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Par suite, la courbe représentative de f s'obtient à partir de celle de la fonction carrée par :

- une « multiplication » par a ;
- une translation « horizontale » de $\alpha \vec{e}$;
- une translation « verticale » de $\beta \vec{j}$.

En utilisant les résultats du chapitre sur les fonctions associées, on obtient les résultats résumés dans le tableau 1.

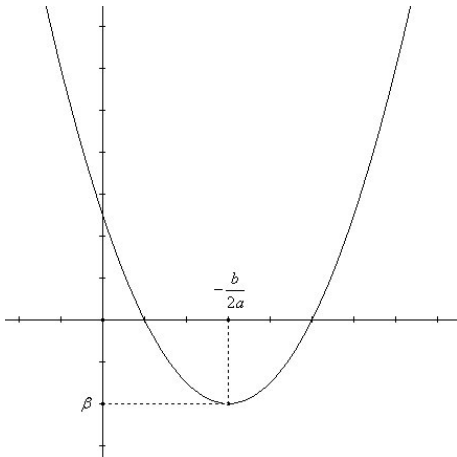
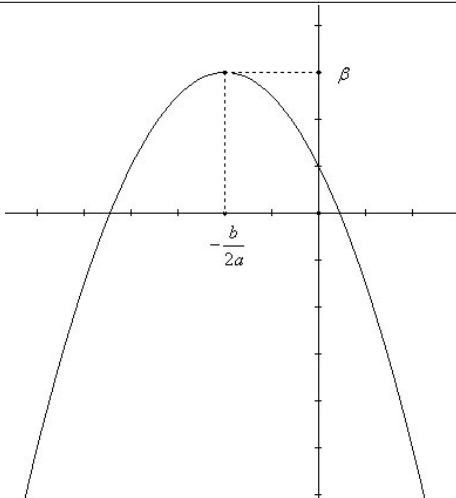
	$a > 0$	$a < 0$																
Tableau de variations de f	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\searrow \quad \nearrow$ β</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$f(x)$		$\searrow \quad \nearrow$ β		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\nearrow \quad \searrow$ β</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$f(x)$		$\nearrow \quad \searrow$ β	
x	$-\infty$	α	$+\infty$															
$f(x)$		$\searrow \quad \nearrow$ β																
x	$-\infty$	α	$+\infty$															
$f(x)$		$\nearrow \quad \searrow$ β																
Courbe représentative de f																		

TABLE 1 – Variations d'un trinôme du second degré

Remarques :

1. La courbe représentative d'un trinôme du second degré est appelée **parabole**.
2. Le **sommet** de la courbe est le point $S(\alpha; \beta)$.
Si $a > 0$, elle est tournée vers le haut.
Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.

Exercices : 19, 20, 21 page 91 et 26 page 92⁶ – 27 page 92 et 29, 31 page 93⁷ [Déclic]

-
3. QCM – Vrai ou Faux : différentes formes d'un polynôme du second degré.
 4. Détermination de la forme canonique.
 5. Choix d'une forme pour résoudre des équations et inéquations.
 6. Étude de variations.
 7. Problèmes concrets : bénéfice, coût de production, coût moyen.

2 Équations du second degré – Factorisation

2.1 Discriminant – Application

Activité : Activité 3 page 83⁸ [Déclic]

Propriété (admise) :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

Alors, on peut mettre f sous la forme : $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Δ est appelé **discriminant** du polynôme.

Remarque : Suivant le signe du discriminant, il peut être possible de factoriser l'expression entre crochets (voir Activité), ce qui permet de résoudre dans le cas général l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$).

Propriété (admise) : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

Le signe de Δ permet de trouver les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) :

– Si $\Delta > 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **deux** solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– Si $\Delta = 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **une seule** solution :

$$\alpha = \frac{-b}{2a}.$$

– Si $\Delta < 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet **aucune** solution.

Exemples :

1. Résoudre l'équation $2x^2 + 7x - 15 = 0$.

Ici, on a : $a = 2$; $b = 7$ et $c = -15$. Donc : $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-15) = 49 + 120 = 169$.

$\Delta > 0$, cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 - 13}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$x_2 = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 + 13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

On a donc : $S = \left\{ -5; \frac{3}{2} \right\}$.

2. Résoudre l'équation $4x^2 - 4,8x + 1,44 = 0$.

Ici, on a : $a = 4$; $b = -4,8$ et $c = 1,44$. Donc : $\Delta = (-4,8)^2 - 4 \times 4 \times 1,44 = 23,04 - 23,04 = 0$.

$\Delta = 0$, cette équation admet donc une seule solution :

$$\alpha = \frac{-(-4,8)}{2 \times 4} = \frac{4,8}{8} = 0,6$$

On a donc : $S = \{0,6\}$.

3. Résoudre l'équation $2x^2 + x + 1 = 0$.

Ici, on a : $a = 2$; $b = 1$ et $c = 1$. Donc : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7$.

$\Delta < 0$, cette équation n'admet aucune solution. On a donc : $S = \emptyset$.

Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines** du polynôme f .

Dans le cas $\Delta = 0$, l'unique racine est appelée **racine double**.

8. Vers la forme générale du trinôme.

Remarque : Il peut être utile de programmer sa calculatrice pour automatiser cette résolution (voir page 87 [Déclic]). Attention cependant, les résultats donnés peuvent être des valeurs approchées.

Exercices : 32, 34 page 93⁹ – 47, 48, 51, 52 page 95¹⁰ – 59, 60 page 96¹¹ et 75, 78 page 97¹² [Déclic]

2.2 Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété (admise) :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. On reprend les notations du 2.1.

- Si $\Delta > 0$: f se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$: f se factorise sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2$.
- Si $\Delta < 0$: f ne se factorise pas.

Exemples : On reprend les exemples du 2.1.

1. $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$ se factorise en $f(x) = 2(x - (-5))\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2(x + 5)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.
2. $f(x) = 4x^2 - 4, 8x + 1, 44$ se factorise en $f(x) = 4(x - 0, 6)^2$.
3. $f(x) = 2x^2 + x + 1$ ne se factorise pas.

Exercice : 33 page 93¹³ [Déclic]

3 Inéquations du second degré

3.1 Étude préliminaire

Les résultats du 1.3 et du 2.1 permettent de donner l'allure de la parabole représentant $f(x) = ax^2 + bx + c$ suivant :

- le signe de a (parabole tournée vers le haut ou vers le bas) ;
- le signe de Δ (nombre de solutions de $f(x) = 0$, donc nombre de points d'intersection avec l'axe des abscisses).

Les différents cas possibles sont résumés dans le tableau 2.

3.2 Signe des polynômes du second degré

En utilisant les courbes du tableau 2 et en observant leurs positions par rapport à l'axe des abscisses, on obtient la propriété suivante :

Propriété : Signe du trinôme

- Si $\Delta > 0$, f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé à a entre les racines.
- Si $\Delta = 0$, f est toujours du signe de a (et s'annule uniquement en α)
- Si $\Delta < 0$, f est toujours strictement du signe de a .

Exemples :

1. Signe de $f(x) = -2x^2 + x - 4$
On a $a = -2$, donc $a < 0$.
 $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 1 - 32 = -31$. $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de racines.
 f est donc toujours strictement du signe de a , donc toujours strictement négatif.

9. Résolution sans calcul de discriminant.
10. Résolution d'équations à la calculatrice
11. Équations diverses.
12. Applications concrètes.
13. Exemples de factorisations.

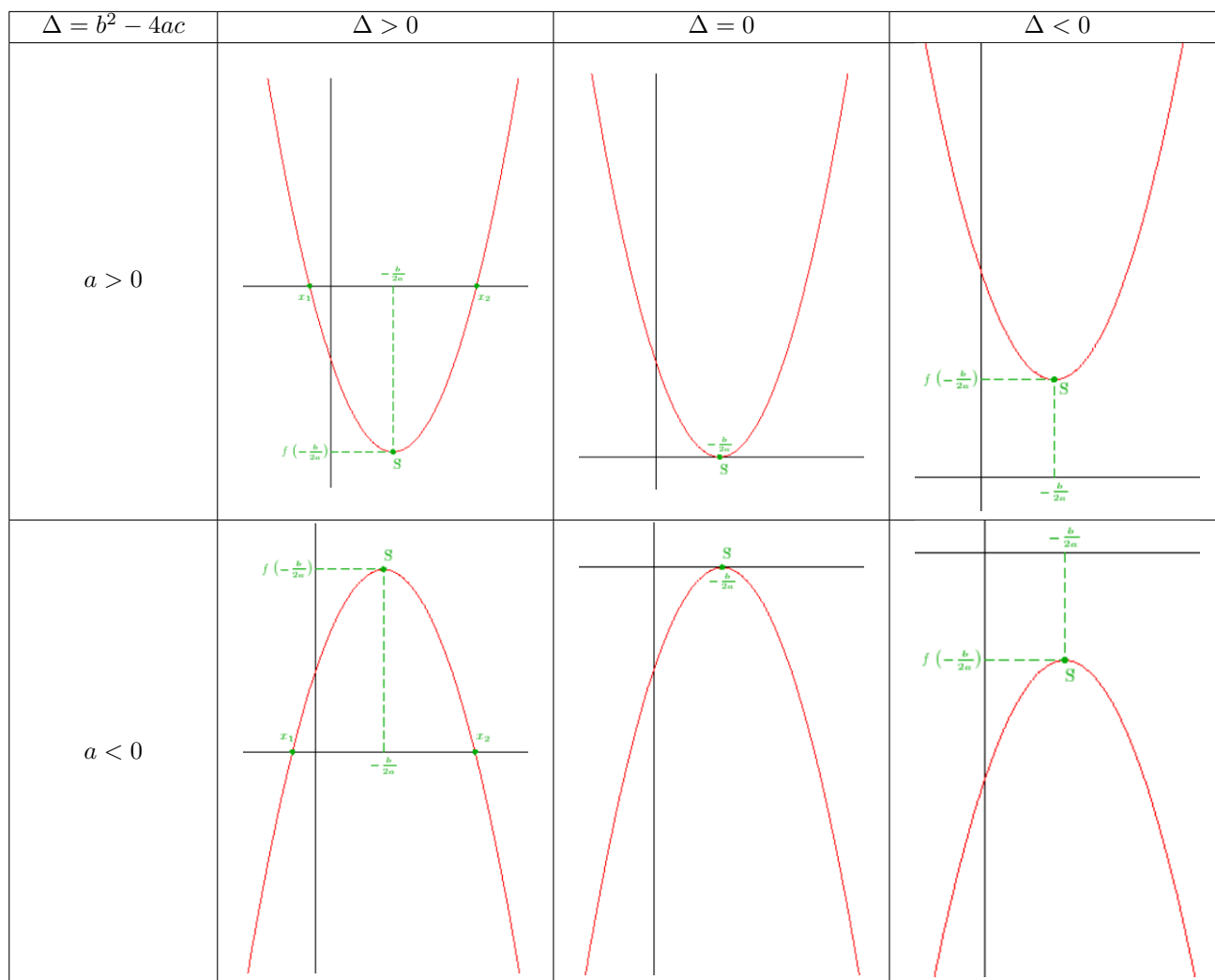


TABLE 2 – Parabole représentant un polynôme du second degré

2. Signe de $f(x) = x^2 + 4x - 5$

On a $a = 1$, donc $a > 0$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$. $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé à a entre. On obtient le tableau 3.

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

TABLE 3 – Un exemple d'étude de signe.

Exercices : 43 page 94 et 44, 45 page 95¹⁴ – 55, 56 page 96¹⁵ et 61, 64, 65, 66 page 96¹⁶ – 69, 72, 73 page 97¹⁷ [Déclic]

14. Signe du trinôme – Utilisation de la propriété.

15. Signe d'expressions plus complexes.

16. Résolution d'inéquations.

17. Lien avec les fonctions.

Références

[Déclic] Déclic 1re ES, édition 2005 (HACHETTE ÉDUCATION)

2, 3, 4, 5, 6