

SÉRIE D'EXERCICES

Exercice1 : Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

a- la forme canonique de $p(x)$.

b- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$

1) $p(x) = x^2 + x - 1$; 2) $p(x) = -x^2 + x - 1$; 3) $p(x) = x^2 - 7x + 6$.

4) $p(x) = -5x^2 + x + 1$; 5) $p(x) = x^2 + 2x + 2$; 6) $p(x) = 4x^2 + 2x - 2$.

7) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$; 8) $p(x) = x^2 + x + 1$; 9) $p(x) = -5x^2 - 4x + 1$

Exercice2 : Dans chacun des cas suivants, déterminer :

les réels a ; b ; c ; d etc.....

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

2) $q(x) = 2x^3 - 12x - 9$

$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

$f(x) = (2ax + 1)(-bx - 1)(x + c)$

4) $g(x) = 2x^3 - 12x - 9$

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

5) $i(x) = x^2 + x - 1$.

$i(x) = (2x + a)(x - b)$

6) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

$k(x) = ax^2 + bx + c$

7) $l(x) = x^2 - 7x + 9$.

$l(x) = (\frac{-3a}{4}x - b)^2$

Exercice3 : Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont rationnelles puis en déduire leur ensemble de définition :

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$; 2) $g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 7x + 9$; 3) $h(x) = (-x + 8)^3$

4) $p(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 5}$; 5) $q(x) = \left(\frac{7x + 1}{-x - 1}\right)^3$; 6) $k(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{-x + 3}}$;

7) $i(x) = \frac{x + 2}{(2x + 1)(x^2 - 1)}$

Exercice4

A°) 1°) Trouver deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

on a :
$$x^2 f(x) + (x - 1)^2 g(x) = 1$$

2°) Soit la fonction polynôme $P : x \rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Trouver deux nombres a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.

En déduire une factorisation de P .

B°) 1°) Développer $(x^2 + bx + c)^2$.

2°) Montrer que $(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

Exercice5

1 Déterminer les réels m , n et p pour que : $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ soit factorisable par $(x-3)(x^2-1)$. Donner alors une factorisation.

2 Trouver le nombre réel k tel que la fonction polynôme suivante :

$$P : x \rightarrow 4x^4 - 20x^3 + 53x^2 - 10kx + 7k \text{ soit le carré d'une fonction polynôme de degré 2.}$$

Exercice6 : Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

On suppose que $p(x)$ admet trois racines distinctes x_1 ; x_2 ; et x_3 .

1) Calculer : $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ et $x_1 x_2 x_3$ sans calculer les racines.

2) En déduire alors la valeur de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

3) Résoudre $p(x) = 0$. Vérifier les résultats obtenus au 1).

Exercice7 : Soit $p(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1) Déterminer les trois réels a , b et c tel que :

$$p(x) = a(2x - 5)^3 + b(2x - 5)^2 + c(2x - 5).$$

2) En déduire une factorisation de $p(x)$.

Exercice8 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme $p(x)$ de degré 3 tel que :

1) $P(x)$ admet -1 , 1 et 2 pour racines et $p(0) = 4$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x+1) - p(x) = x(x+1)$ et $p(1) = 0$.

Exercice9 : Soit l'équation : $x^3 + 9x^2 + 51x + 155 = 0$.

Déterminer le réel h tel que, en posant $X + h = x$, l'équation proposée s'écrive alors :

$X^3 + pX + q = 0$; où p et q sont des coefficients que l'on déterminera.

Exercice10 : Dans chacun des cas suivants :

a- Déterminer l'ensemble de définition D_f .

b- Simplifier $f(x)$ sur D_f .

c- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$

$$1) f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{(-x+1)(x+2)} ; 2) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3} ; 3) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$$

Exercice11 : Soit les fonctions polynômes p et q définies par :

$$P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24 \text{ et}$$

$$q(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$$

1) a- Montrer que 2 est un zéro triple de p , puis en déduire les autres zéros de p .

b- Résoudre l'inéquation : $x \in [-5; 5]$; $P(x) \leq 0$.

2) Calculer $q(2)$ et $q(3)$ puis en déduire les zéros de q .

1) Soit la fraction rationnelle $h : x \longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$

a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.

b- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice12 : Soit les fonctions polynômes f et g définies par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

1) Déterminer les zéros de f .

2) Soit la fraction rationnelle $h : x \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$

c- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.

d- Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que : $\forall x \in D_h$ on a :

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice13 : Soit la fonction polynôme h définie par : $h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que : $h(x) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c)$.

3) Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{3x}{x^4 - 4}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de f .

b- Ecrire f sous forme $\frac{N(x)}{D(x)}$ où N et D sont deux polynômes.

c- Résoudre l'équation $f(x) = 0$

Exercice14 : Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a- l'équation $f(x) = x$

b- l'inéquation $f(x) \leq x$

Exercice15 : Soit le polynôme $p(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

1) Trouver un polynôme q tel que $p(x) = [q(x)]^2$

2) Résoudre $p(x) = 0$.

3) a- Trouver les réels a , b et c tels que $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$.

c- Simplifier la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5}$