

Les applications

20 situations complexes 11^e Sciences

Approche Par les Compétences Programme malien de mathématiques

M. Almame Traoré

Chaque situation mobilise des savoirs déjà étudiés séparément. Les supports contiennent parfois des **informations parasites** (à écarter) ou **lacunaires** (à compléter ou à signaler). Les situations vont du plus simple au plus complexe et couvrent l'ensemble des notions du chapitre.

Notion du programme	Situations
Correspondance, application, image, antécédent	1, 2, 5
Image directe et image réciproque d'une partie	2, 12
Ensemble de définition	3, 8, 10, 15, 20
Égalité de deux applications ; restriction ; prolongement	3, 11, 19
Injection	4, 5, 6, 7, 9, 10, 16
Surjection	1, 2, 5, 7, 10, 16
Bijection	4, 5, 7, 8, 11, 13, 17 à 20
Composition d'applications	13, 14, 15, 16, 20
Application réciproque	17, 18, 19, 20

Bloc A Généralités sur les applications

Situation 1 Application, image, antécédent, surjectivité

Titre : *L'affectation des candidats du DEF à Kati*

1. Contexte : Trois semaines avant l'examen du DEF, le Centre d'Animation Pédagogique (CAP) de Kati répartit les candidats libres dans trois centres d'examen. Le premier tableau, saisi à la main, comporte des erreurs.

2. Support : Ensemble des candidats $E = \{C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6\}$; ensemble des centres $F = \{\text{Kati-Centre} ; \text{Kati-Malibougou} ; \text{Kati-Sananfara}\}$.

Candidat	Date de naissance	Centre(s) inscrit(s) dans le tableau
C_1	12/03/2010	Kati-Centre
C_2	05/11/2009	Kati-Malibougou
C_3	21/07/2010	Kati-Centre et Kati-Malibougou
C_4	30/01/2011	Kati-Malibougou
C_5	14/09/2010	(case vide)
C_6	02/02/2010	Kati-Centre

Règlement : à chaque candidat compose dans un centre et un seul z.

3. Fonction : Tu es agent de planification au CAP. Tu dois valider ou corriger le tableau avant sa transmission à l'Académie.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer si la correspondance à candidat $\mapsto$ centre z est une application de E dans F . Justifier en citant les lignes fautives.

Consigne 2 : Proposer une correction minimale qui en fait une application surjective, puis donner, pour cette correction, l'ensemble des antécédents de chaque centre.

Consigne 3 : Démontrer qu'aucune répartition des 6 candidats dans ces 3 centres ne peut être injective.

Situation 2 Image directe et image réciproque d'une partie

Titre : *Les clubs du mercredi après-midi*

1. Contexte : Le lycée organise des clubs le mercredi après-midi. Le censeur veut savoir quels clubs fonctionnent et quels élèves contacter pour chaque activité.

2. Support : $E = \{\text{Awa, Bakary, Cheick, Djénéba, Fanta, Issa, Mariam, Oumar}\}$; $F = \{\text{Mathématiques, Théâtre, Santé, Environnement}\}$. Chaque élève choisit un seul club :

Élève	Club	Élève	Club
Awa (11 ^e S)	Mathématiques	Fanta (10 ^e)	Mathématiques
Bakary (10 ^e)	Théâtre	Issa (11 ^e S)	Théâtre
Cheick (11 ^e S)	Mathématiques	Mariam (12 ^e)	Environnement
Djénéba (12 ^e)	Environnement	Oumar (11 ^e S)	Mathématiques

On note f l'application à élève $\mapsto$ club z et A l'ensemble des élèves de 11^e S. Les clubs commencent à 15 h ; la salle de théâtre peut accueillir 40 personnes.

3. Fonction : Tu es le secrétaire du bureau des clubs. Tu dois préparer les listes demandées par le censeur.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'image directe $f(A)$, puis les images réciproques : $f^{-1}(\{\text{Mathématiques}\})$; $f^{-1}(\{\text{Théâtre, Environnement}\})$; $f^{-1}(\{\text{Santé}\})$.

Consigne 2 : Justifier que f n'est ni injective ni surjective, en t'appuyant sur les résultats de la consigne 1.

Consigne 3 : Déterminer $f^{-1}(f(A))$ et le comparer à A . Conclure.

Situation 3 Égalité de deux applications, restriction, prolongement

Titre : *L'erreur du tableur de l'intendante*

1. Contexte : L'intendante d'un lycée utilise un tableur pour un calcul de gestion. Un stagiaire a saisi une formule différente de celle de l'intendante ; pour une valeur, le tableur affiche $\#DIV/0!$.

2. Support : Formule du stagiaire : $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Formule de l'intendante : $g(x) = x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$. Valeurs testées : $x = 5$, $x = -1$, $x = 3$. Le fichier compte 12 feuilles de calcul.

3. Fonction : Tu es chargé de vérifier les formules du fichier avant la clôture des comptes.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'ensemble de définition D_f de f , puis démontrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Consigne 2 : Les applications $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont-elles égales ? Justifier.

Consigne 3 : Justifier que f est la restriction de g à D_f , puis déterminer le prolongement de f à $\mathbb{R}$ et la valeur à inscrire dans la case où apparaît $\#DIV/0!$.

Bloc B Injection, surjection, bijection (ensembles finis)

Situation 4 Injectivité et bijection sur un ensemble fini

Titre : *Les numéros matricules du lycée*

1. Contexte : À la rentrée 2026-2027, un lycée de Bamako numérise les dossiers de ses 850 élèves. Chaque élève doit recevoir un identifiant unique dans la base de données.

2. Support : Deux propositions :

— Censeur : l'élève inscrit au rang n ($n \in \{1; 2; \dots; 850\}$) reçoit le matricule

$$m(n) = 26\,000 + n$$

.

— Secrétaire : l'identifiant est formé des initiales du nom puis du prénom (ex. : Coulibaly Aminata $\mapsto$ CA).

Extrait de la liste : Coulibaly Aminata, Cissé Abdoulaye, Traoré Moussa, Diarra Fatoumata. Le lycée compte 34 enseignants et 18 salles de classe.

3. Fonction : Tu es l'informaticien chargé de la base de données. Le système retenu ne doit jamais attribuer le même identifiant à deux élèves.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que m est injective.

Consigne 2 : Démontrer, par un contre-exemple tiré du support, que l'identifiant par initiales n'est pas injectif.

Consigne 3 : Déterminer un ensemble d'arrivée F pour lequel $m : \{1; \dots; 850\} \rightarrow F$ est une bijection.

Situation 5 Injection, surjection, bijection

Titre : *Le bulletin de notes*

1. Contexte : Au conseil de classe du 1^{er} trimestre, le professeur principal d'une 11^e Sciences convertit les notes d'un devoir noté sur 40, puis remplit les appréciations des bulletins.

2. Support :

- Conversion : $c : [0; 40] \rightarrow [0; 20]$, $c(n) = \frac{n}{2}$.
- Appréciation : $a : [0; 20] \rightarrow \{\text{Insuffisant, Passable, Assez bien, Bien, Très bien}\}$: Insuffisant si $n < 10$; Passable si $10 \leq n < 12$; Assez bien si $12 \leq n < 14$; Bien si $14 \leq n < 16$; Très bien si $n \geq 16$.
- Notes sur 40 : Modibo 18; Bakary 22; Fanta 25; Kadiatou 29; Awa 31; Oumou 36. Coefficient de la matière : 5.

3. Fonction : Tu es secrétaire du conseil de classe. Tu dois expliquer aux parents ce que l'on peut déduire d'une note et ce que l'on peut déduire d'une appréciation.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que c est une bijection de $[0; 40]$ sur $[0; 20]$.

Consigne 2 : En utilisant les élèves du support, démontrer que a est surjective mais pas injective.

Consigne 3 : Un parent affirme : « L'appréciation de ma fille est *Bien*, donc je connais sa note. » Justifier pourquoi il a tort.

Situation 6 Injectivité et cardinal d'ensembles finis

Titre : *Les codes courts des agents de santé*

1. Contexte : Le ministère de la Santé lance une campagne de vaccination. Chacun des 12 500 agents de santé communautaires doit recevoir un code court pour envoyer ses rapports par SMS.

2. Support : Proposition initiale : codes de 4 chiffres, de 0000 à 9999. La campagne couvre toutes les régions du pays et dure 10 jours. Exigence du cahier des charges : « deux agents différents ne doivent jamais avoir le même code ».

3. Fonction : Tu es l'ingénieur informaticien de la campagne. Tu dois valider ou rejeter

la proposition.

4. Consignes :

Consigne 1 : Traduire l'exigence du cahier des charges en termes d'application injective.

Consigne 2 : Démontrer qu'il n'existe aucune application injective des agents vers les codes à 4 chiffres.

Consigne 3 : Déterminer le nombre minimal de chiffres pour qu'une application injective existe. Justifier.

Bloc C Fonctions numériques : injectivité, surjectivité, images

Situation 7 Injectivité et surjectivité d'une fonction affine

Titre : *La facture d'électricité*

1. Contexte : Une famille de Sébénikoro reçoit sa facture d'électricité et veut vérifier sa consommation.

2. Support : Tarif simplifié (fictif) : une prime fixe de 1 500 FCFA plus 98 FCFA par kWh. Pour une consommation x (en kWh, $x \geq 0$), le montant est $f(x) = 98x + 1\,500$.
Facture du mois : *montant à payer : 26 000 FCFA ; ancien index : illisible ; date limite : 15 novembre.*

3. Fonction : Élève de 11^e Sciences, tu aides ta famille à retrouver la consommation à partir du montant.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est injective mais pas surjective.

Consigne 2 : Démontrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1\,500; +\infty[$.

Consigne 3 : Déterminer la consommation du mois. Expliquer pourquoi l'ancien index n'est pas nécessaire.

Situation 8 Ensemble de définition et bijection

Titre : *Le bureau de change*

1. Contexte : Avant un voyage d'études, un étudiant change ses francs CFA en euros dans un bureau de change de l'ACI 2000.

2. Support : Parité fixe : $1 \text{ €} = 655,957 \text{ FCFA}$. Le bureau retient des frais fixes de 2 000 FCFA par opération. Pour une somme y en FCFA, le montant remis en euros est $e(y) =$

$\frac{y - 2000}{655,957}$. Le bureau est ouvert de 8 h à 17 h ; 7 personnes attendent.

3. Fonction : Tu es caissier stagiaire. Tu dois préciser à quelles sommes s'applique la formule et garantir à chaque client un montant bien déterminé.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'ensemble D des sommes y pour lesquelles l'opération a un sens (montant remis positif ou nul).

Consigne 2 : Démontrer que e est une bijection de D sur $[0; +\infty[$.

Consigne 3 : Déterminer la somme minimale à verser, au franc près, pour recevoir au moins 500 .

Situation 9 Injectivité : une bijection suivie d'un arrondi

Titre : *Le thermomètre du CSCOM*

1. Contexte : Le CSCOM de Banconi reçoit un thermomètre électronique qui affiche la température en degrés Fahrenheit, arrondie à l'unité. L'infirmier major se demande s'il peut l'utiliser.

2. Support : Conversion : $F(C) = 1,8C + 32$. Relevés de trois enfants : 36,2 °C ; 36,4 °C ; 38,9 °C. Valeurs affichées : 97 °F ; 98 °F ; 102 °F. Seuil de fièvre : 38 °C. Alimentation : pile de 3 V.

3. Fonction : Tu es technicien biomédical. Tu dois dire si la valeur affichée permet de retrouver la température en °C.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection.

Consigne 2 : Démontrer que la correspondance n température exacte en °C $\mapsto$ valeur affichée arrondie à l'unité z n'est pas injective (construire deux températures différentes qui donnent le même affichage).

Consigne 3 : Pour un affichage de 100 °F, déterminer l'intervalle des températures possibles en °C. Conclure : peut-on décider si l'enfant a de la fièvre ?

Situation 10 Fonction rationnelle : injectivité, image de l'ensemble de départ

Titre : *Le coût moyen du beurre de karité*

1. Contexte : Une coopérative de femmes de Sikasso transforme les amandes de karité en beurre et veut fixer un prix de vente.

2. Support : Pour x kilogrammes produits ($x > 0$), le coût moyen par kilogramme, en FCFA, est

$$C(x) = \frac{500x + 20\,000}{x}.$$

Les 20 000 FCFA correspondent à la location du moulin. Le groupement compte 25 femmes.

3. Fonction : Tu es animateur d'une ONG d'appui. Tu dois dire quels coûts moyens sont atteignables et pour quelle production.

4. Consignes :

Consigne 1 : Justifier que l'ensemble de définition de C contient $]0; +\infty[$, puis démontrer que $C :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est injective.

Consigne 2 : Démontrer que C n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble $C(]0; +\infty[)$.

Consigne 3 : La présidente vise un coût moyen de 700 FCFA, puis de 450 FCFA. Déterminer la production nécessaire dans chaque cas, ou justifier que c'est impossible.

Situation 11 Restriction d'une application pour obtenir une bijection

Titre : *Le bénéfice de la coopérative rizicole*

1. Contexte : Une coopérative rizicole de l'Office du Niger, à Niono, étudie son bénéfice en fonction des quantités vendues.

2. Support : Pour q centaines de sacs vendus ($q \in [0; 40]$), le bénéfice, en dizaines de milliers de FCFA, est

$$B(q) = -q^2 + 40q - 300.$$

Capacité du magasin : 4 000 sacs. La coopérative compte 120 membres.

3. Fonction : Tu es conseiller de gestion. Le président veut savoir si chaque niveau de bénéfice correspond à une seule quantité vendue.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que $B(q) = 100 - (q - 20)^2$, puis que $B : [0; 40] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective (calculer $B(10)$ et $B(30)$).

Consigne 2 : Démontrer que la restriction de B à $[0; 20]$ est une bijection de $[0; 20]$ sur $[-300; 100]$.

Consigne 3 : Déterminer, dans $[0; 20]$, le nombre de sacs à vendre pour un bénéfice de 750 000 FCFA.

Situation 12 Image directe et image réciproque d'un intervalle

Titre : *Le taxi de l'aéroport*

1. Contexte : Les taxis agréés de l'aéroport de Bamako-Sénou appliquent un tarif fixé par une convention avec la mairie.

2. Support : Prix d'une course de d km : $p(d) = 500 + 200d$ (FCFA), $d \geq 0$. Un client a parcouru 15 km ; le chauffeur réclame 3 700 FCFA. Le véhicule consomme 8 L aux 100 km.

3. Fonction : Tu es agent de la mairie chargé de régler les litiges et d'informer les voyageurs.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'image directe $p([5; 10])$ et l'interpréter.

Consigne 2 : Un voyageur dispose d'un budget compris entre 2 000 et 3 000 FCFA. Déterminer l'image réciproque $p^{-1}([2000; 3000])$ et l'interpréter.

Consigne 3 : Déterminer $p([0; 15])$. Le prix réclamé est-il conforme ? Déterminer la distance qui correspondrait à 3 700 FCFA.

Bloc D Composition d'applications

Situation 13 Composition d'applications

Titre : *Du paddy aux sacs de riz*

1. Contexte : Une rizerie de San reçoit du paddy (riz non décortiqué) et le livre en sacs de 50 kg.

2. Support : Étape 1 : le décortiquage donne 65 % de riz blanc : $f(x) = 0,65x$ (x : kg de paddy). Étape 2 : l'ensachage de y kg de riz blanc donne $g(y) = \frac{y}{50}$ sacs. Commande d'un grossiste : 26 sacs. La rizerie emploie 14 ouvriers.

3. Fonction : Tu es responsable de production. Tu dois calculer la quantité de paddy à traiter pour une commande donnée.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$ et interpréter ce nombre.

Consigne 2 : Démontrer que $g \circ f$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

Consigne 3 : Déterminer la quantité de paddy nécessaire pour la commande du grossiste.

Situation 14 Composition : l'ordre compte

Titre : *Le transport de ciment vers Sikasso*

1. Contexte : Une entreprise de transport de Bamako livre du ciment à Sikasso et établit ses factures.

2. Support : Coût hors taxes pour x tonnes : $f(x) = 20000x + 50000$ (FCFA). TVA à 18 % sur un montant y : $g(y) = 1,18y$. Un client reçoit une facture TTC de 295 000 FCFA. Distance Bamako–Sikasso : environ 370 km.

3. Fonction : Tu es comptable de l'entreprise. Tu dois vérifier la facture et expliquer à un stagiaire l'ordre des calculs.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$, puis démontrer que $g \circ f \neq f \circ g$.

Consigne 2 : Justifier laquelle des deux composées donne le montant TTC.

Consigne 3 : Déterminer le tonnage livré au client.

Situation 15 Ensemble de définition d'une composée

Titre : *La station hydrologique de Koulikoro*

1. Contexte : La station de suivi du fleuve Niger à Koulikoro transforme le signal brut d'un capteur en niveau d'eau, puis en un coefficient utilisé par le logiciel de prévision des crues.

2. Support : Le capteur transmet un signal x . Niveau d'eau : $L = f(x) = \sqrt{x-4}$ (en m). Coefficient de prévision : $g(L) = \frac{1}{L-2}$, non défini au niveau d'étalonnage $L = 2$ m. Le logiciel calcule directement $h = g \circ f$. Dernière mesure : $x = 13$. Température de l'eau : 27 °C.

3. Fonction : Tu es technicien de la station. Le logiciel affiche n erreur z pour certains signaux ; tu dois les identifier.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'ensemble de définition de f , puis celui de g .

Consigne 2 : Déterminer l'ensemble de définition de $h = g \circ f$ et l'expression de $h(x)$.

Consigne 3 : Calculer $h(13)$, puis déterminer le signal pour lequel le niveau existe mais le logiciel affiche n erreur z .

Situation 16 Composition, injectivité et surjectivité

Titre : *L'anonymat des copies du baccalauréat*

1. Contexte : Pendant la correction du baccalauréat, chaque copie est rendue anonyme en deux étapes.

2. Support : E : ensemble des candidats ; F : ensemble des numéros d'anonymat ; G : ensemble des codes-barres. $f : E \rightarrow F$ associe à chaque candidat son numéro d'anonymat ; $g : F \rightarrow G$ associe à chaque numéro son code-barres. Règle de la commission : n deux candidats différents ne reçoivent jamais le même code-barres z , c'est-à-dire $g \circ f$ est injective. Nombre de correcteurs : 120.

3. Fonction : Tu es membre de la commission de contrôle. Tu dois prouver que cette règle protège aussi l'étape intermédiaire.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Consigne 2 : Construire un contre-exemple (petits ensembles) montrant que g peut ne pas être injective même si $g \circ f$ l'est.

Consigne 3 : Démontrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Bloc E Bijection et application réciproque

Situation 17 Bijection et réciproque sur un ensemble fini

Titre : *Les codes de table et la fraude*

1. Contexte : Dans un centre d'examen du baccalauréat, le jury attribue un code de table à chacun des 500 candidats.

2. Support : Le candidat de rang x ($x \in \{1; 2; \dots; 500\}$) reçoit le code $N(x) = 7x + 2026$. Codes présentés au contrôle : 2 530 ; 2 531 ; 5 526 ; 5 533. Le centre compte 25 salles de 20 candidats.

3. Fonction : Tu es président de jury. Tu dois retrouver le rang de chaque candidat à partir de son code et détecter les faux codes.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que N est une bijection de $\{1; \dots; 500\}$ sur son image $N(\{1; \dots; 500\})$.

Consigne 2 : Déterminer l'application réciproque N^{-1} .

Consigne 3 : Pour chaque code présenté, déterminer le rang du candidat ou justifier qu'il s'agit d'un faux code.

Situation 18 Bijection homographique et réciproque

Titre : *La solution chlorée du CSCOM*

1. Contexte : Pendant une épidémie de choléra en saison des pluies, un CSCOM de Mopti prépare une solution chlorée en ajoutant une solution mère à 12 % de chlore à une cuve de 100 litres d'eau.

2. Support : Si l'on verse x litres de solution mère ($x \geq 0$), la concentration obtenue, en %, est

$$c(x) = \frac{12x}{x + 100}.$$

Concentration recommandée pour la désinfection des excréta des malades : 2 %. Le CSCOM reçoit 40 patients par jour.

3. Fonction : Tu es agent d'hygiène. Tu dois établir une règle qui donne la quantité exacte de solution mère pour toute concentration voulue.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que c est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; 12[$.

Consigne 2 : Déterminer l'application réciproque c^{-1} , puis la quantité de solution mère pour obtenir 2 %.

Consigne 3 : Un agent veut obtenir une concentration de 12 %. Justifier que c'est impossible.

Situation 19 Restriction, bijection et réciproque

Titre : *Le feu d'artifice du 22 Septembre*

1. Contexte : Pour la fête de l'Indépendance, un feu d'artifice est tiré au stade du 26 Mars. L'artificier doit programmer l'explosion des fusées à une hauteur donnée.

2. Support : Hauteur d'une fusée (en m), t secondes après le tir : $h(t) = -5t^2 + 20t$, $t \in [0; 4]$. Hauteur d'explosion souhaitée : 15 m, pendant la montée. Nombre de fusées : 60.

3. Fonction : Tu es assistant de l'artificier. Tu dois calculer l'instant de mise à feu de la charge pour une hauteur donnée.

4. Consignes :

Consigne 1 : Démontrer que $h : [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective (utiliser la hauteur de 15 m).

Consigne 2 : Démontrer que la restriction de h à $[0; 2]$ est une bijection de $[0; 2]$ sur $[0; 20]$.

Consigne 3 : Déterminer la réciproque de cette restriction, puis l'instant d'explosion pour 15 m pendant la montée.

Situation 20 Synthèse : composition, bijection et réciproque

Titre : *La sécurisation des résultats en ligne*

1. Contexte : Pour publier les résultats d'examen en ligne, un service informatique chiffre chaque numéro de dossier x en deux étapes avant de l'envoyer sur le serveur.

2. Support : Étape 1 : $f(x) = 2x + 5$. Étape 2 : $g(y) = \frac{y+1}{y-2}$. Le serveur reçoit $h(x) = g \circ f(x)$. Codes reçus : $\frac{4}{3}$ et $\frac{8}{7}$. Un troisième code reçu vaut 1. Sauvegarde quotidienne du serveur : 23 h.

3. Fonction : Tu es ingénieur en sécurité informatique. Tu dois prouver que le chiffrement est réversible et retrouver les numéros de dossier.

4. Consignes :

Consigne 1 : Déterminer l'ensemble de définition D de h , puis démontrer que $h(x) = \frac{2x+6}{2x+3}$.

Consigne 2 : Démontrer que h est une bijection de D sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, déterminer h^{-1} et vérifier que $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Consigne 3 : Retrouver les numéros de dossier des deux premiers codes. Justifier que le code 1 signale une anomalie.