

EXERCICES SUR LES APPLICATIONS

EXERCICE 1 : soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{4+x^2}{2}$$

1) Déterminer l'image directe par f des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \mathbb{R}_+ ; B = [2; 6]; C = \{0; 2; 6\}.$$

2) Déterminer l'image réciproque par f de :

$$P = [2; 10]; K =]3; 4[; J = \{0\}$$

3) L'application f est-elle bijective ? si oui déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE 2 : 1) soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

Trouver l'image directe par f de :

$$a) A = [1; 3]; b) B = [-3; -2]; c) D = [-2; 3]$$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

Déterminer $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{-2\})$.

EXERCICE 3 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [\frac{2}{3}; +\infty[$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 : Soit $f: [3; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1) Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$.

2) Utiliser ce résultat de la première question pour montrer que si $x \in [3; +\infty[$ alors $f(x) \in [0; +\infty[$. Que peut-on alors dire de f .

3) Soit $y \in [0; +\infty[$

a) Quel est le nombre de solutions dans $[3; +\infty[$ de $f(x) = y$?

b) f est-elle injective ? est-elle bijective ?

EXERCICE 5 : Soient les fonctions $f; g; h$ définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$g: [0; 2] \rightarrow [0; 1];$$

$$h: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \mapsto 3x - 4$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 1$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

- 1) Déterminer $f([0; 1])$; $f(] - 1; 2])$.
- 2) g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 3) Déterminer $h([-2; -1])$; $h^{-1}([2; 3])$.

EXERCICE 6 : 1) Montrer que $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x; y) \mapsto (x + 3; y - 2)$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

2) Soit $g: [-1; 1] \rightarrow A$

$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ Déterminer A pour que la fonction g soit surjective.

EXERCICE 7 : Soit la fonction g définie sur $[-1; 5]$ par

$$\begin{cases} g(x) = |x - 1|, \text{ si } x \in [-1; 3] \\ g(x) = \frac{5x - 11}{2}, \text{ si } x \in [3; 5] \end{cases}$$

- 1) Représenter la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- 2) Chercher graphiquement l'image par g de chacune des intervalles : $[-1; 5]$; $]0; 5]$; $[-1; 0]$.
- 3) Déterminer graphiquement l'image réciproque par g des intervalles : $[1; 2]$; $]2; 7]$; $\{0\}$.

4) Vérifier par calcul les résultats obtenus.

EXERCICE 8 : Soient les fonctions f ; g définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}; \quad g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

$$x \mapsto 3x - 2$$

- 1) Les fonctions f et g sont-elles des bijections ?
- 2) Calculer $f \circ g(0)$; $g \circ f(0)$; $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
- 3) Trouver $f([-2; -1])$; $g([-2; 0])$; $f^{-1}([2; 3])$; $f^{-1}(] - \infty; 0])$.
- 4) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
- 5) Sur quel intervalle f et g coïncident ?

EXERCICE 9 : 1) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |2x - 1| + |x - 3| - 1. \text{ Déterminer}$$

$$f([-1; 1]) \text{ et } f^{-1}(]5; +\infty[).$$

2) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -4x - 5$$

Déterminer la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

3) Trouver deux fonctions f et g telles que $h(x) = (f \circ g)(x)$ dans les cas suivants :

$$\text{a) } h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} \quad ; \quad \text{b) } h(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \quad ; \quad \text{c) } h(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{d) } h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2} \quad ; \quad \text{e) } h(x) = (3x + 1)^2 \quad ; \quad \text{f) } h(x) = (x + 5)^3 + 4.$$

EXERCICE 10 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + |x - 2| + 3$

a) Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

b) Donner la restriction g de f à l'intervalle $[2; +\infty[$.

c) On donne $I = [3; 5]$ et $J = [9; 10]$ trouver $g(I)$ puis $g^{-1}(J)$.

EXERCICE 11 : Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous :

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Trouver l'image directe par f des intervalles suivants :
 $A = [-3; -1]; B =] - 1; 4[; C = \{-3; -1\}.$
- 3) Trouver l'image réciproque par f des intervalles suivants :
 $F =]1; 3[; G =] - \infty; -3]; H = [-2; 3].$
- 4) Donner les formules explicites de $f(x)$.
- 5) Montrer que f est bijective et tracer dans le même repère la courbe de sa bijection réciproque.