

SÉRIES D'EXERCICES

EXERCICE :

- 1) Après avoir déterminer leur domaine de dérivabilité, calculer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{3}{(-4x+1)^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x+1}}$

c) $f(x) = \frac{(1-3x)^2}{x^2+1}$

- 2) Soit la fonction $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$$

- a) Déterminer l'image J de $[0; +\infty[$ par f et démontrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur J .
- b) Déterminer la bijection réciproque g .
Calculer $g'(2)$. (On utilisera la formule de la dérivée d'une fonction réciproque) ;
- c) Expliquer comment on trouve la courbe de la bijection réciproque g à partir de celle de la fonction f .

EXERCICE :

Soient A et B deux sous ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction telle que : $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

- 1) Déterminer le plus grand sous ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que f soit une application.
- 2) Déterminer B pour que f soit bijective.
- 3) Déterminer la bijection réciproque de f .
- 4) Soit : $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

- a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+1}$
- b) Déterminer l'image directe des sous ensemble suivants : $E = \{0; 1; 2\}, F = [1; 3]$
- c) Déterminer l'image réciproque des sous ensemble suivants :
 $H = \{-2; -1; 0; 2\}, F = [-2; -1]$

EXERCICE :

- 1) Soient f une application définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; +\infty[$
$$x \mapsto x^2 - 1$$

Déterminer l'ensemble des antécédents par f d'un réel m .

2) Soit g une application $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

a) g est – elle bijective ? Si oui déterminer sa réciproque.

b) Construire la courbe de g

3) On donne l'application $h : \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$$x \mapsto \frac{2x + 1}{x + 3}$$

a) Montrer que h est bijective.

b) Déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{6 - 2x}$

2) $k(z) = \frac{z - 1}{\sqrt{(z - 3)(z + 4)}}$

3) $g(x) = \frac{x}{-3x^2 + 9x + 12}$

4) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x^2 - 4}{|x + 2| - |x + 3|}$

5) $p : [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x - E(x)}$ (avec $E(x)$ est la partie entière de x)

6) $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{5x + 4}{3x - 4}$

EXERCICE :

1) Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto |2x + 4| - |3 - x|$

a) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Trouver une fonction g qui coïncide avec f sur l'intervalle $[-2; 3]$.

c) Trouver une fonction g qui coïncide avec f sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

2) Soit g définie par : $g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$

a) Déterminer la restriction de g sur les intervalles suivants : $] -\infty; 2]$; $[8; 4]$; $\mathbb{R}_+ - \{2\}$.

b) Construire la courbe de g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE :

1) Soient les fonctions f et g définies par : $f : x \mapsto 3x - 2$ et $g : x \mapsto \frac{2}{x - 1}$

a) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes : $f \circ g$ et $g \circ f$.

b) Pour tout x élément du domaine de définie de $g \circ f$; calculer $g \circ f(x)$.

2) Dites si les applications suivantes sont-elles injectives

a) $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x-3}{x-1}$$

b) $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

c) $h : x \mapsto 2x^2 + 3$

d) $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x; y) \mapsto (3x - 2y; x + 2y)$$

3) Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty; 1]$

$$x \mapsto -x^2 + 1$$

b) $g : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+3}{x-2}$$

4) Les applications suivantes sont-elles bijections ?

a) $f : [-2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \sqrt{2x+4}$$

b) $g : [-1; +\infty[\rightarrow]-\infty; -1]$

$$x \mapsto -x^2 + 2x + 2$$

EXERCICE :

1) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

$$x \mapsto \sqrt{|x| - 2}$$

$$x \mapsto \sqrt{x - 2}$$

a) Préciser l'ensemble de définition de f et de g .

b) En déduire que g est la restriction de f à $[2; +\infty[$.

2) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x^2+1}{x-2}$$

$$x \mapsto x^2 + 3x - 4$$

a) Donner le domaine de définition de chacune des fonctions f ; h ; $f \circ h$ et $h \circ f$.

b) La fonction h est-elle bijective ?

c) Calculer : $(f \circ h)(x)$ et $(h \circ f)(x)$

EXERCICE :

On donne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1; +\infty[$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

$$x \mapsto \frac{x-4}{x-1}$$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

1) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes Df , Dg , $Df \circ g$ et $Dg \circ f$.

- 2) Calculer $(gof)(2)$, $(fog)(0)$; $(gof)(x)$ et $(fog)(x)$.
- 3) Trouver le sous ensemble A de $\mathbb{R}$ sur le quel g est une bijection et préciser sa réciproque.
- 4) Calculer $f^{-1}(\{1\})$, $g([0; 3[)$, $h^{-1}(]-1; 1])$.
- 5) Montrer que h est une application.
- 6) Montrer que h est bijective. Préciser sa bijection réciproque.

EXERCICE :

Soient g et h deux fonctions définies par : $g : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ et $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty[$

$$x \mapsto (x - 1)^2 \qquad x \mapsto \sqrt{x} + 1$$

- 1) Les fonctions g et h sont – elles des applications ?
- 2) Déterminer $(goh)(x)$ et $(hog)(x)$.
- 3) Montrer que les applications g et h sont bijectives.
- 4) Déterminer la réciproque de chacune des fonctions g et h .

EXERCICE :

Soient p et q deux fonctions définies par : $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{5 - 2x} \qquad x \mapsto \frac{3x+1}{-2x}$$

- 1) Trouver le domaine de définition pour p et q .
- 2) Déterminer $q(\{-1; 2\})$, $p([-2; 1])$ et $p^{-1}([3; 5])$.
- 3) Déterminer l'expression de $(qop)(x)$.

EXERCICE :

Dites si les fonctions ci – dessous sont égales :

- | | |
|--|--|
| <p>1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \mapsto x + 2$</p> | <p>$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$</p> |
| <p>2) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-1}$</p> | <p>$q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$</p> |
| <p>3) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{x^2-3x}{x}$</p> | <p>$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x - 3$</p> |