

APPLICATIONS

Exercice 1 :

1) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f sous forme d'intervalle ou réunion d'intervalles.

a) $f(x) = 2x^3 - 5\sqrt{x} + 11$; b) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+x-6}$; c) $f(x) = \frac{3x+5}{|x+2|-1}$
 d) $f(x) = \frac{|x^2-3x+2|}{3+|x|}$; e) $f(x) = \frac{5x+1}{2+x^2}$; f) $f(x) = \sqrt{x^2-7x+6}$

2) On considère les fonctions f ; g et h définies par :

$f(x) = 3x - 2$; $g(x) = \frac{5x+1}{x-3}$ et $h(x) = \sqrt{2-x}$

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ h$; $g \circ h$; $h \circ g$ et $h \circ f$

Exercice 2 : On donne :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x+1)^3$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x-1}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{t^2-4}{|t+2|}$

et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto t-2$

g) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto \frac{z^2-6z+9}{z-3}$

et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto z-3$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x-2}{x^2-8}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-1}$

Dans chacun des cas ci-dessus, montrer que les fonctions f et g sont égales (ou qu'elles coïncident)

Exercice 3 : On considère les applications f et g définies par :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$
 $x \mapsto x^2 - 4x + 5$ $x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$

1) Déterminer les réels a, b, α et β tels que : $f(x) = (x + \alpha)^2 - \beta$ et $g(x) = a + \frac{b}{x-3}$

2) Déterminer $f(\{-1; 0\})$; $f([1; 3])$; $g\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}\right)$ et $g([-3; 5])$

3) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}([-2; +\infty])$; $g^{-1}([1; 2])$ et $g^{-1}([-\infty; -6])$

Exercice 4 : On considère les applications f et g définies par :

$f: [-3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x-1| + 2|3-x|$ $x \mapsto 2x + 5$

a) Exprimer f suivant les valeurs de x

b) g est-elle la restriction de f à $[1; 3]$? Justifier votre réponse.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x-1}{|x|-1}$

1) Trouver la restriction de f à chacune des ensembles $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ et $\mathbb{R}_- - \{-1\}$

2) Soit g la restriction de f à $]-1; 0]$. Prouver que g est une injection.

Exercice 6 :

1) On donne les applications f et g définies par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (2x; 1 - x) \quad (x; y) \mapsto (x - 2y; x + 3y)$$

- Montrer que f est une injection
 - Montrer que g est une bijection puis expliciter g^{-1}
- 2) Soit f l'application définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $$x \mapsto x^2 - 1$$

f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 7 : Soit $f : [1; 16] \rightarrow [1; 10]$

$$x \mapsto \frac{3x+2}{5}$$

- Montrer que f est une application
- Montrer que f est une injection
- Prouver que f est une bijection puis expliciter sa bijection réciproque

Exercice 8 :

I/ On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = -2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = ax + b$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$
- Déterminer un couple $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que : $g \circ f = f \circ g$

II/ Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x; y) \mapsto (-x + 3y; 3x - 4y)$$

Déterminer $f \circ f(x; y)$

III/ Trouver deux fonctions f et g telles que $h(x) = f \circ g(x)$ dans les cas suivants :

- $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$; 2) $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$;
- $h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2}$; 5) $h(x) = (3x + 1)^2$; 6) $h(x) = (x + 5)^3 + 4$

Exercice 9 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit l'application f définie par sa représentation graphique.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Trouver l'image directe des intervalles
suivants : $[-4; -1]$; $[-1; 2]$; $[2; 4]$; $[4; 5]$
- Trouver l'image réciproque des intervalles
suivants : $[-1; 0]$; $\{2\}$.
- Définir explicitement f .
- Vérifier par calcul les résultats obtenus en 2°) et 3°).

