

## APPLICATIONS

### Exercice 1 :

1) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  sous forme d'intervalle ou réunion d'intervalles.

a)  $f(x) = 2x^3 - 5\sqrt{x} + 11$  ;    b)  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+x-6}$  ;    c)  $f(x) = \frac{3x+5}{|x+2|-1}$   
 d)  $f(x) = \frac{|x^2-3x+2|}{3+|x|}$  ;    e)  $f(x) = \frac{5x+1}{2+x^2}$  ;    f)  $f(x) = \sqrt{x^2-7x+6}$

2) On considère les fonctions  $f$ ;  $g$  et  $h$  définies par :

$f(x) = 3x - 2$  ;  $g(x) = \frac{5x+1}{x-3}$  et  $h(x) = \sqrt{2-x}$

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions  $f \circ g$ ;  $g \circ f$ ;  $f \circ h$ ;  $g \circ h$ ;  $h \circ g$  et  $h \circ f$

### Exercice 2 : On donne :

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto (x+1)^3$

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{x-1}$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{t^2-4}{|t+2|}$

et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto t-2$

g)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $z \mapsto \frac{z^2-6z+9}{z-3}$

et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $z \mapsto z-3$

h)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x-2}{x^2-8}$  ;  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-1}$

Dans chacun des cas ci-dessus, montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont égales (ou qu'elles coïncident)

### Exercice 3 : On considère les applications $f$ et $g$ définies par :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$   
 $x \mapsto x^2 - 4x + 5$      $x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$

1) Déterminer les réels  $a, b, \alpha$  et  $\beta$  tels que :  $f(x) = (x + \alpha)^2 - \beta$  et  $g(x) = a + \frac{b}{x-3}$

2) Déterminer  $f(\{-1; 0\})$ ;  $f([1; 3])$ ;  $g\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}\right)$  et  $g([-3; 5])$

3) Déterminer  $f^{-1}(\{0\})$ ;  $f^{-1}([-2; +\infty])$ ;  $g^{-1}([1; 2])$  et  $g^{-1}([-\infty; -6])$

### Exercice 4 : On considère les applications $f$ et $g$ définies par :

$f: [-3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: [1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |x-1| + 2|3-x|$      $x \mapsto 2x + 5$

a) Exprimer  $f$  suivant les valeurs de  $x$

b)  $g$  est-elle la restriction de  $f$  à  $[1; 3]$ ? Justifier votre réponse.

### Exercice 5 : Soit $f$ la fonction définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x-1}{|x|-1}$

1) Trouver la restriction de  $f$  à chacune des ensembles  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$  et  $\mathbb{R}_- - \{-1\}$

2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]-1; 0]$ . Prouver que  $g$  est une injection.

**Exercice 6 :**

1) On donne les applications  $f$  et  $g$  définies par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (2x; 1 - x) \quad (x; y) \mapsto (x - 2y; x + 3y)$$

- Montrer que  $f$  est une injection
  - Montrer que  $g$  est une bijection puis expliciter  $g^{-1}$
- 2) Soit  $f$  l'application définie par :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $$x \mapsto x^2 - 1$$

$f$  est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

**Exercice 7 :** Soit  $f : [1; 16] \rightarrow [1; 10]$ 

$$x \mapsto \frac{3x+2}{5}$$

- Montrer que  $f$  est une application
- Montrer que  $f$  est une injection
- Prouver que  $f$  est une bijection puis expliciter sa bijection réciproque

**Exercice 8 :**

I/ On considère les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f(x) = -2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = ax + b$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ , calculer  $g \circ f(x)$  et  $f \circ g(x)$
- Déterminer un couple  $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que :  $g \circ f = f \circ g$

II/ Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x; y) \mapsto (-x + 3y; 3x - 4y)$$

Déterminer  $f \circ f(x; y)$

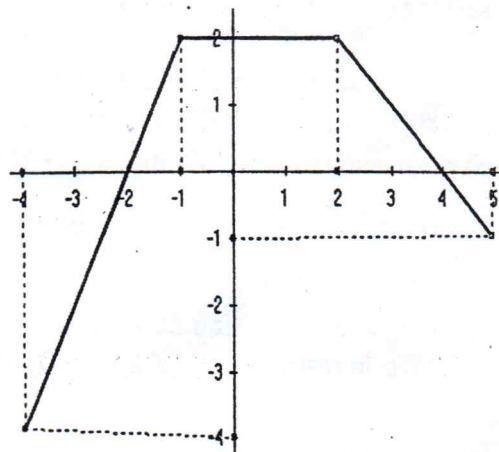
III/ Trouver deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $h(x) = f \circ g(x)$  dans les cas suivants :

- $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$  ; 2)  $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  ; 3)  $h(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$  ;
- $h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2}$  ; 5)  $h(x) = (3x + 1)^2$  ; 6)  $h(x) = (x + 5)^3 + 4$

**Exercice 9 :** Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Soit l'application  $f$  définie par sa représentation graphique.

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Trouver l'image directe des intervalles  
suivants :  $[-4; -1]$ ;  $[-1; 2]$ ;  $[2; 4]$ ;  $[4; 5]$
- Trouver l'image réciproque des intervalles  
suivants :  $[-1; 0]$ ;  $\{2\}$ .
- Définir explicitement  $f$ .
- Vérifier par calcul les résultats obtenus en 2°) et 3°).



## EXERCICES SUR LES APPLICATIONS

EXERCICE 1 : soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{4+x^2}{2}$$

1) Déterminer l'image directe par  $f$  des sous ensembles de  $\mathbb{R}$  suivants :

$$A = \mathbb{R}_+ ; B = [2; 6]; C = \{0; 2; 6\}.$$

2) Déterminer l'image réciproque par  $f$  de :

$$P = [2; 10]; K = ]3; 4[; J = \{0\}$$

3) L'application  $f$  est-elle bijective ? si oui déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE 2 : 1) soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ .

Trouver l'image directe par  $f$  de :

$$a) A = [1; 3]; b) B = [-3; -2]; c) D = [-2; 3]$$

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - x - 2$ .

Déterminer  $f^{-1}(\{0\})$  ;  $f^{-1}(\{-2\})$ .

EXERCICE 3 : Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow [\frac{2}{3}; +\infty[$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ .

La fonction  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 : Soit  $f: [3; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = (x - a)^2 - b$ .

2) Utiliser ce résultat de la première question pour montrer que si  $x \in [3; +\infty[$  alors  $f(x) \in [0; +\infty[$ . Que peut-on alors dire de  $f$ .

3) Soit  $y \in [0; +\infty[$

a) Quel est le nombre de solutions dans  $[3; +\infty[$  de  $f(x) = y$ ?

b)  $f$  est-elle injective ? est-elle bijective ?

EXERCICE 5 : Soient les fonctions  $f; g; h$  définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$g: [0; 2] \rightarrow [0; 1];$$

$$h: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \mapsto 3x - 4$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 1$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

- 1) Déterminer  $f([0; 1])$  ;  $f(] - 1; 2])$ .
- 2)  $g$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 3) Déterminer  $h([-2; -1])$  ;  $h^{-1}([2; 3])$ .

**EXERCICE 6 :** 1) Montrer que  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x; y) \mapsto (x + 3; y - 2)$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

2) Soit  $g: [-1; 1] \rightarrow A$

$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$  Déterminer  $A$  pour que la fonction  $g$  soit surjective.

**EXERCICE 7 :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $[-1; 5]$  par

$$\begin{cases} g(x) = |x - 1|, \text{ si } x \in [-1; 3] \\ g(x) = \frac{5x - 11}{2}, \text{ si } x \in [3; 5] \end{cases}$$

- 1) Représenter la fonction  $g$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- 2) Chercher graphiquement l'image par  $g$  de chacune des intervalles :  $[-1; 5]$  ;  $]0; 5]$  ;  $[-1; 0]$ .
- 3) Déterminer graphiquement l'image réciproque par  $g$  des intervalles :  $[1; 2]$  ;  $]2; 7]$  ;  $\{0\}$ .

4) Vérifier par calcul les résultats obtenus.

**EXERCICE 8 :** Soient les fonctions  $f$  ;  $g$  définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}; \quad g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

$$x \mapsto 3x - 2$$

- 1) Les fonctions  $f$  et  $g$  sont-elles des bijections ?
- 2) Calculer  $f \circ g(0)$  ;  $g \circ f(0)$  ;  $f \circ g(x)$  et  $g \circ f(x)$ .
- 3) Trouver  $f([-2; -1])$  ;  $g([-2; 0])$  ;  $f^{-1}([2; 3])$  ;  $f^{-1}(] - \infty; 0])$ .
- 4) Résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ .
- 5) Sur quel intervalle  $f$  et  $g$  coïncident?

**EXERCICE 9 :** 1) Soit l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = |2x - 1| + |x - 3| - 1. \text{ Déterminer}$$

$$f([-1; 1]) \text{ et } f^{-1}(]5; +\infty[).$$

2) Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par

$$f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -4x - 5$$

Déterminer la partie  $C$  de  $\mathbb{R}$  sur laquelle  $f$  et  $g$  coïncident.

3) Trouver deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $h(x) = (f \circ g)(x)$  dans les cas suivants :

$$\text{a) } h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} \quad ; \quad \text{b) } h(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \quad ; \quad \text{c) } h(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{d) } h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2} \quad ; \quad \text{e) } h(x) = (3x + 1)^2 \quad ; \quad \text{f) } h(x) = (x + 5)^3 + 4.$$

**EXERCICE 10 :** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x + |x - 2| + 3$

a) Ecrire  $f(x)$  sans le symbole valeur absolue.

b) Donner la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

c) On donne  $I = [3; 5]$  et  $J = [9; 10]$  trouver  $g(I)$  puis  $g^{-1}(J)$ .

**EXERCICE 11 :** Soit la fonction  $f$  définie par sa représentation graphique ci-dessous :

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- 2) Trouver l'image directe par  $f$  des intervalles suivants :  
 $A = [-3; -1]; B = ] - 1; 4[; C = \{-3; -1\}$ .
- 3) Trouver l'image réciproque par  $f$  des intervalles suivants :  
 $F = ]1; 3[; G = ] - \infty; -3]; H = [-2; 3]$ .
- 4) Donner les formules explicites de  $f(x)$ .
- 5) Montrer que  $f$  est bijective et tracer dans le même repère la courbe de sa bijection réciproque.

## Exercices et Problèmes :

Chap. Fonctions et Applications

### Exercice1 :

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x}; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}; \quad h(x) = \frac{4x-1}{x+1}; \quad k(x) = \sqrt{\frac{4x-1}{x+1}}$$

### Exercice2 : 1. Soit l'application :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x+1} \end{aligned} \quad \text{Trouve } f(A) \text{ et } f(B) \text{ où } A = ]-1; 4] \text{ et } B = \{0\}.$$

2. On donne les fonctions  $g: x \mapsto 2x-1$  et  $h: x \mapsto x^2 - x - 2$ . Trouve  $g^{-1}(A)$  et  $h^{-1}(B)$

Exercice3 : On considère les applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$  et  $g(x) = x^2 - x - 2$ .

1. Trouve  $f([1;3])$  et  $f([-2;3])$

2. Trouve  $g^{-1}(\{0\})$  et  $g^{-1}(\{-2\})$

Exercice4 : Sur quel intervalle de  $\mathbb{R}$  l'application  $f: x \mapsto |2-x| + |3-x| + 2x$  est-elle égale à l'application affine de source  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = 2x + 1$

Exercice5 : On donne les fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ;  $g(x) = 3x-5$ ;  $h(x) = x^2$ .

1. Calcule  $g \circ f(x)$ ,  $g \circ h(x)$  et  $f \circ h(x)$ .

2. En déduis  $g \circ f(2)$ .

3.  $f, g$  et  $h$  sont-elles bijectives de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ ? Justifie ta réponse.

Exercice6 : Précise si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} &\longrightarrow [-1; +\infty[ & h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & k: ]0; \pi] &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto x^2 + 1 & x &\longmapsto x^2 - 1 & x &\longmapsto 3x + 5 & x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

### Exercice7 :

1. On définit l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[ \\ x &\longmapsto 3x^2 - 2x + 1 \end{aligned} \quad \text{f est-elle injective? Surjective? Bijective?}$$

2. On définit l'application :

$$\begin{aligned} f: [4; +\infty[ &\longrightarrow [-15; +\infty[ \\ x &\longmapsto x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

a. Prouve que  $f$  est une bijection.

b. Détermine sa bijection réciproque.

c. Trace la courbe  $(C)$  de  $f$  et en déduis celle de sa bijection réciproque  $(C')$ .

Exercice8 : Soit l'application :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{3\} \\ x &\longmapsto \frac{3x+2}{x-1} \end{aligned}$$

1. Montre que  $f$  est bijective.

2. Détermine l'application réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ .

### Exercice9 :

1. Montre que  $|x|^2 = x^2$ .

2. Soient les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies respectivement par :  $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$  et  $g(x) = |x| - 1$