

Exercice 1 :

Détermine D_f dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

3) $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{3x-4}$

4) $f(x) = \frac{x-4}{5x^2+6x+1}$

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+2}$

6) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}}$

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$

9) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+1}$

10) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$

11) $f(x) = \frac{2x+3}{|x+1|-2}$

12) $f(x) = \frac{x^2-2x+7}{|x-1|+5}$

Exercice 2 :

Soit f et g définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x - 3$.

1) Déterminer D_f , D_g , $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$.

2) Calculer $f \circ g(1)$ et $g \circ f(1)$.

Exercice 3 :

Précise si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow [-1; +\infty[; \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 1 \quad x \mapsto x^2 - 1 \quad x \mapsto 3x + 5$$

Exercice 4 :

On définit l'application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$$

$$x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$$

f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

2) On définit l'application :

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$$

a) Prouve que f est une bijection.

b) Détermine sa bijection réciproque.

c) Trace la courbe (C) de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduis celle de sa bijection réciproque (C_0) .

Exercice 5 :

Etudier si f de E vers F est injective, surjective, bijective dans les cas suivant

a) $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 + 2$

b) $E = \mathbb{R} - \{1\}$; $F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$

c) $E = \mathbb{R} - \{1\}$, $F = \mathbb{R} - \{2\}$ et $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

d) $E = \mathbb{R}^+$; $F = \mathbb{R}$ et $f(x) = 3x^2 - 4$

Exercice 6 :

Reconnaitre les applications ou restriction d'application parmi les fonctions suivantes

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2-3x+4}{x^2-1}$$

b) $g:]-\frac{1}{2}; 2[\cup]2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 4 + \frac{1}{(x-2)\sqrt{3x+1}}$$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left| \frac{2x+1}{5-x} \right|$$

Exercice 7 :

1) Déterminer l'ensemble B pour que f soit surjective dans les cas suivants

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow B \quad ; \quad f : [1 ; 4] \rightarrow B$$

$$t \mapsto \frac{t}{t+2} \quad \quad a \mapsto \sqrt{-a^2 + 5a - 4}$$

2) Déterminer l'ensemble B pour que f soit bijective dans les cas suivants

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow B \quad ; \quad h : [-2 ; +\infty[\rightarrow B$$

$$x \mapsto 2x^2 + 5 \quad \quad x \mapsto \sqrt{x+2}$$

Exercice 8 :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par:

$$f(x) = 2x - 7 \text{ et } g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$$

1°) Quelles sont les images par f de (-5) ; 0 ; 5 ?

2°) Quelles sont les images par g de (-3) ; 1 ; 3 ?

3°) Quels sont les antécédents de 14 ; (-4) ; 5 par f ?

4°) Quels sont les antécédents de 11 ; 2 ; 7 par g ?

Exercice 9 :

Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$$f(x) = x + x^2 \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{x-2}.$$

1) donner les domaines de définition D_f et D_g de f et de g .

2) f et g sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier.

3) L'application f est-elle injective ? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier.

4) Soit $U(x) = g \circ f(x)$ et $V(x) = f \circ g(x)$. Calculer $U(x)$ et $V(x)$ puis donner D_U et D_V .

Exercice 10 :

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left| \frac{x+1}{x-2} \right| \quad \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

1) Exprimer f sans le symbole de la valeur absolue.

2) Trouver un ensemble A sur lequel f et g coïncident et un ensemble B sur

lequel $f \neq g$.

Exercice 11 :

I- Soit $f : [3 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[$ définie par

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1) Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$

2) Utiliser ce résultat de la première question pour montrer que si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) \in [0 ; +\infty[$. Que peut-on alors dire de f .

3) Soit $y \in [0 ; +\infty[$

a) Quel est le nombre de solutions dans $[3 ; +\infty[$ de $f(x) = y$?

b) f est-elle injective ? Est-elle bijective ?

II- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{3}{2} ; +\infty[\right.$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier

III- Soit $g : [-1 ; 1] \rightarrow A$

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}.$$

Déterminer A pour que la fonction g soit surjective

Exercice 12 :

Soient les fonctions p et q définies par :

$$p :]-3 ; 5] \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad q : [3 ; 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x+1| + |2-x| \quad \quad x \mapsto 2x-1$$

1) Ecrire p sans le symbole de la valeur absolue.

2) Quelle est la restriction de p à l'intervalle $[0 ; 1]$?

3) L'application q est-elle la restriction de p dans $[3 ; 4]$?

4) Trouver le prolongement de q à $[1 ; 5]$ (On donnera une représentation graphique de p).

Exercice 13 :

Soit f et g les fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = 2x - |2 - 2x| + |x + 1| \quad \text{et} \quad g(x) = 3x - 3$$

- 1) Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- 2) Déterminer le plus grand ensemble B sur lequel f et g coïncident.

Exercice 14 :

Soient les fonctions f ; g définies respectivement par :

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} ; g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1} \quad x \mapsto 3x - 2$$

- 1) Les fonctions f et g sont-elles des bijections ?
- 2) Calcule $f \circ g(0)$; $g \circ f(0)$; $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
- 3) Trouve $f([-2 ; -1])$; $g([-2 ; 0])$; $f^{-1}([2 ; 3[)$; $f^{-1}(]-\infty ; 0])$
- 4) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
- 5) Sur quel intervalle I , f et g coïncident ?

Exercice 15 :

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 - x - 2$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

- 1) Trouver l'image directe par g de : $A = [-1 ; 4]$; $B = [-2 ; 0]$; $C =]3 ; +\infty[$.
- 2) Déterminer $f^{-1}\left(\left\{6 ; -4 ; -\frac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}([-2 ; 0])$.
- 3) Déterminer $f([-1 ; 2])$.

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- 1) Représenter graphiquement la fonction f .
- 2) Déterminer l'image par f des intervalles : $]-\infty ; -1]$; $[0 ; +\infty[$; $[0 ; 1]$

Exercice 17 :

Soit g la fonction définie par : $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{3x-2}$$

Démontrer que g est bijective puis expliciter sa bijection réciproque.

Exercice 18 :

soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de h .
- 2) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D_h$; $h(x) = a + \frac{b}{x-1}$. Puis déterminer l'image directe par h de chacun des ensembles suivants :

$$A = [-1 ; 2] \quad ; \quad B = [-1 ; 1] \quad ; \quad C = \left\{-2 ; -1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right\}$$

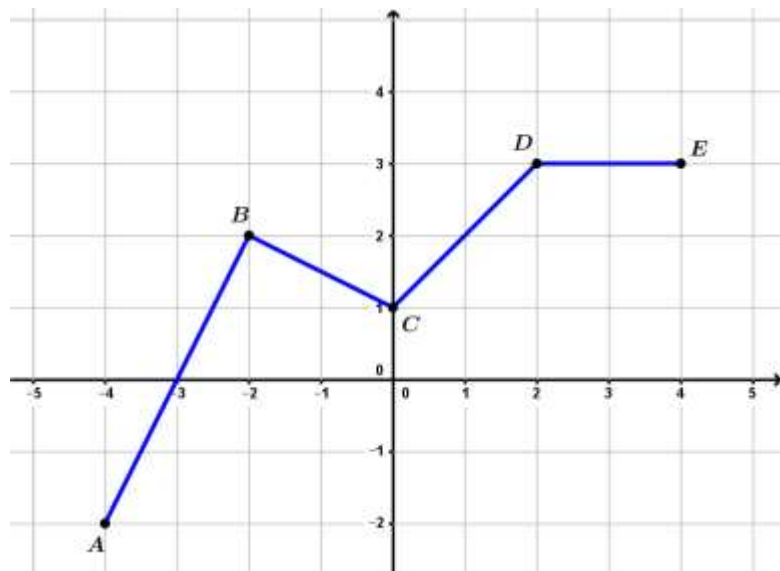
Exercice 19 :

Soient les fonctions f , g et h définies respectivement par :

$$f(x) = 3x - 1 ; g(x) = -5x + 2 ; h(x) = x^2 + 1$$

- 1°) Trouver les images directes par f de chacun des intervalles $A = [-5, 4]$; $B =]3, 8[$; $C =]-9, 0]$; $D = [-11, -8]$
- 2°) Trouver les images directes par g de chacun des intervalles $A = [-5, 4]$; $B =]3, 8[$; $C =]-9, 0]$; $D = [-11, -8]$
- 3°) Trouver les images directes par h de chacun des intervalles $I = [0, 5]$; $J =]6, 8[$; $K = [-4, -1]$

Exercice 20 : Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous



- 1°) Déterminer l'ensemble de définition Df de f
- 2°) Trouver graphiquement l'image par f de chacun des intervalles $I = [-4, -2]$; $J = [-2, 0]$; $K =]0, 2[$; $L = [2, 4]$; $E = [-3, 1]$
- 3°) Trouver graphiquement l'image réciproque par f des parties suivantes : $F =]2, 3[$; $G = [-2, 0]$; $H = [-2, 3]$; $P =]0, 2[$

Exercice 21 :

- 1) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |2x - 1| + |x - 3| - 1$
 - a) Ecris f sans le symbole de la valeur absolue ;
 - b) Détermine $f([-1; 1])$ et $f^{-1}(]5; +\infty[)$
- 2°) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2$ et $g(x) = -4x - 5$
 - a) Ecris f sans le symbole de valeur absolue ;
 - b) Détermine la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

Exercice 22 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + |x - 2| + 3$

- a) Écris $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- b) Donne la restriction g de f à l'intervalle $[2; +\infty[$
- c) On donne $I = [3; 5]$ et $J = [9; 10]$. Trouve $g(I)$ puis $g(J)$

Exercice 23 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |2x - 1| + |x - 3|$$

- 1) Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue
- 2) Détermine la restriction de f à chacun des intervalles suivants $]-\infty; \frac{1}{2}[$; $]\frac{1}{2}; 3[$; $]3; +\infty[$

Exercice 24 :

Chercher l'image des intervalles $[3; 4]$ et $[2; 3]$ par la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x-2}$$

Exercice 25 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{|x|}$$

- a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- b) Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- c) Trouver l'image de $[-2; 1]$ par f à l'aide de la représentation graphique, puis vérifier ce résultat par le calcul.

Exercice 26 :

Calculer l'image réciproque de l'intervalle $[1; 2]$ par la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

Exercice 27 :

1) Soit l'application $f : [-2 ; 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{telle que : } \begin{cases} \forall x \in [-2 ; 0[, f(x) = 0 \\ \forall x \in [0 ; 2] , f(x) = x^2 \\ \forall x \in]2 ; 4] , f(x) = x. \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Utiliser cette représentation graphique pour trouver l'image réciproque par f de chacun des ensembles suivants :

$$\{0\} ; \{4\} ; [2 ; 4] ;]4 ; 5].$$

2) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

Calculer l'image réciproque de $[0 ; 4]$ par f .

Exercice 28 :

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |2x - 1| + |1 - x|.$$

Trouver une fonction g , différente de f , qui coïncide avec f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

2) Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left| \frac{x+1}{x-2} \right| \quad \quad \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-2}.$$

Trouver un ensemble A sur lequel f et g coïncident et tel que $f(x) \neq g(x)$ pour tout élément x de $D_f - A$.

Exercice 29 :

Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \quad \quad x \mapsto \frac{x-5}{x-9}.$$

a) Trouver les ensembles de définition des fonctions f , g , $g \circ f$ et $f \circ g$.

b) Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$.

Exercice 30 :

1) Les applications :

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 3 \quad \quad \quad x \mapsto 2x^2 + 3.$$

sont-elles injectives ?

2) 1) Les applications :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto x^2.$$

sont-elles surjectives ?

Exercice 31 :

1) Montrer que l'application $f : [-1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est une bijection

$$x \mapsto \sqrt{x+1}$$

2) L'application $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? Surjective ?

$$x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$$

Exercice 32 :

1) Soit deux fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x+1} - \frac{2x-1}{x} \quad \quad \quad x \mapsto \frac{-x^2+mx+1}{x(x+1)}.$$

Déterminer m pour que f et g soient égales.

2) Les fonctions

$$f :]-\pi ; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g :]-\pi ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (\sin x + \cos x)^2 \quad \quad \quad x \mapsto 1 + 2 \sin x \cdot \cos x.$$

sont-elles égales ?

3) Les fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^3-1}{x-1} \quad \quad \quad x \mapsto x^2 + x + 1$$

coïncident-elles sur $\mathbb{R} - \{1\}$?

Exercice 33 :

Trouver les ensembles de définition des fonctions f , g , $g \circ f$ et $f \circ g$, puis calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$ dans chacun des cas suivants :

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x-1}$
- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ $x \mapsto \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$
- d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x+1}{2x-1}$ $x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$

Exercice 34 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-1}{|x|-1}.$$

- a) Quelle est la restriction de f à chacun des ensembles suivants : $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ et $\mathbb{R}^- - \{-1\}$.
- b) g est la restriction de f à $] -1 ; 0]$. g est-elle injective ?

Exercice 35 :

1) Soit l'application : $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$$x \mapsto \frac{2x-3}{x-1}.$$

Démontrer que f est bijective. Déterminer son application réciproque f^{-1} .

2) Soit l'application $f : \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}^+$

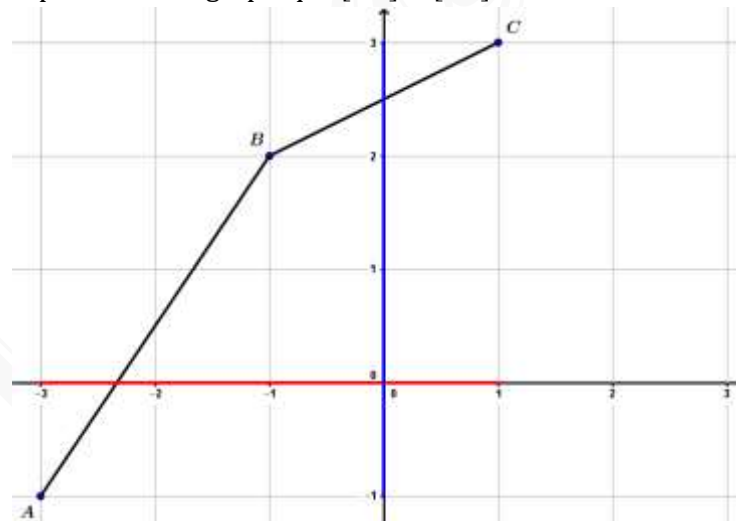
$$x \mapsto \sqrt{2x+1}$$

- a) Démontrer que f est bijective. Déterminer f^{-1} .
- b) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- c) En déduire celle de f .

Exercice 36 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Soit l'application f de $[-3 ; 1]$ dans $[-1 ; 3]$ définie par sa représentation graphique $[AB] \cup [BC]$.



- a) Soit x un élément de $[-3 ; 1]$. Calculer $f(x)$.
- b) Montrer que f est bijective. Déterminer f^{-1} .
- c) Construire la représentation graphique de f^{-1} .

Exercice 1 :

Déterminons D_f dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$

Posons $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta > 0 ; x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	○	○	+

$D_f =]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$

3) $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{3x-4}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; 3x - 4 \neq 0\}$

Posons $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\} =]-\infty ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{x-4}{5x^2+6x+1}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; 5x^2 + 6x + 1 \neq 0\}$

Posons $5x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Delta > 0 ; x_1 = -1 \text{ et } x_2 = -\frac{1}{5}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-1 ; -\frac{1}{5}\right\} =]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{5} ; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+2}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ et } x + 2 \neq 0\}$

Posons $x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ et } x + 2 = 0$

$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 3 \text{ et } x = -2$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	+	○	○	+

$D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]3 ; +\infty[$

6) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; 2x - 3 > 0\}$

Posons $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	-	○	+

$D_f = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x + 1 \geq 0 \text{ et } x - 3 > 0\}$

Posons $x + 1 = 0 \text{ et } x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } x = 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x + 1$	-	○	+	+
$x - 3$	-	-	○	+

$D_f =]3 ; +\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$

$$D_f = \left\{ x/x \in \mathbb{R} ; \frac{x+1}{x-3} \geq 0 \text{ et } x-3 \neq 0 \right\}$$

Posons $x+1=0$ et $x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $x=3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$D_f =]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$$

$$9) f(x) = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 \neq 0\}$$

Posons $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ Impossible

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

$$10) f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 + 2x + 6 \geq 0\}$$

Posons $x^2 + 2x + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 24 = -20 < 0$$

L'équation $x^2 + 2x + 6 = 0$ n'admet pas de solution

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + 2x + 6$	$+$	$+$

$$D_f =]-\infty ; +\infty[$$

$$11) f(x) = \frac{2x+3}{|x+1|-2}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; |x+1| - 2 \neq 0\}$$

$$|x+1| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x+1| = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \text{ ou } x+1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3 ; 1\} =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$12) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{|x-1| + 5}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; |x-1| + 5 \neq 0\}$$

$$|x-1| + 5 = 0 \Leftrightarrow |x-1| = -5 \text{ impossible}$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

Exercice 3 :

Précise si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} & ; & g : \mathbb{R} \rightarrow [-1 ; +\infty[& h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 & & x \mapsto x^2 - 1 & x \mapsto 3x + 5 \end{array}$$

* $\forall y \in \mathbb{R}$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}^+$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x = -\sqrt{y-1} \notin \mathbb{R}^+$$

- $\forall y \in]-\infty ; 1[$ l'équation $f(x) = y$ n'admet pas de solution $S = \{ \}$

- $\forall y \in [1 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution $S = \{\sqrt{y-1}\}$

Conclusion :

$\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet 0 ou une solution dans $\mathbb{R}^+$, alors f est injective.

* $\forall y \in [-1 ; +\infty[$ résolvons l'équation $g(x) = y$ dans $\mathbb{R}$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} \in \mathbb{R} \text{ ou } x = -\sqrt{y+1} \in \mathbb{R}$$

$\forall y \in [-1 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = y$ admet une ou deux solutions dans $\mathbb{R}$. Alors g est surjective.

* $\forall y \in \mathbb{R}$ résolvons l'équation $h(x) = y$ dans $\mathbb{R}$.

$$h(x) = y \Leftrightarrow 3x + 5 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{3} \in \mathbb{R}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $h(x) = y$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$, alors f est bijective.

Exercice 4 :

On définit l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[\\ x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$$

Vérifions si f est injective, surjective, bijective

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right] \\ = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right] \text{ Forme canonique de } f.$$

Ou encore :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ Forme canonique de } f.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(3)(1) = -8$$

$$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{36}\right] = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right]$$

$$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right] \text{ Forme canonique de } f.$$

$\forall y \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right] = y \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{y}{3} - \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3y-4}{9} \Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3y-4}}{3} \text{ ou } x - \frac{1}{3} = \frac{-\sqrt{3y-4}}{3} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3y-4}}{3} + \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{3y-4}}{3} + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3y-4}+1}{3} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{3y-4}+1}{3}$$

$\forall y \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$ admet au moins une solution. Alors f est surjective

2. On définit l'application :

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$$

a. Prouvons que f est une bijection.

f est bijective si et seulement si, pour tout $y \in \mathbb{R} - \{1\}$; l'équation

$f(x) = y$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}; f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \Leftrightarrow x-1 = xy-2y \\ \Leftrightarrow x(1-y) = -2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{-2y+1}{1-y}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{y-1}$$

$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}$ l'équation $f(x) = y$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R} - \{2\}$. Alors f est bijective

b. Déterminons sa bijection réciproque.

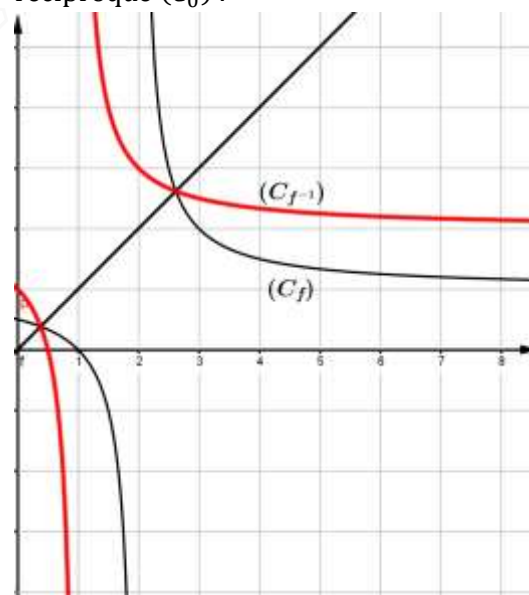
$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique

$$x = \frac{2y-1}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$$

c. Traçons la courbe (C) de f sur $\mathbb{R}^+$ et déduisons-en celle de sa bijection réciproque (C_0) .



Exercice 5 :

Etudions si f de E vers F est injective, surjective, bijective dans les cas suivant

a) $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 + 2$

$\forall y \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2} \text{ ou } x = -\sqrt{y-2}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet zéro, une ou deux solution dans $\mathbb{R}$.

Alors f est surjective.

b) $E = \mathbb{R} - \{1\}$; $F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$\forall y \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = y \Leftrightarrow y - xy = 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet zéro ou une solution dans $\mathbb{R} - \{1\}$

Alors, f est injective

c) $E = \mathbb{R} - \{1\}$, $F = \mathbb{R} - \{2\}$ et $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$\forall y \in \mathbb{R} - \{2\}$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x+1 = xy - y \Leftrightarrow xy - 2x = y+1 \\ \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-2}$$

$\forall y \in \mathbb{R} - \{2\}$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans $\mathbb{R} - \{1\}$

Alors, f est bijective.

d) $E = \mathbb{R}^+$; $F = \mathbb{R}$ et $f(x) = 3x^2 - 4$

$\forall y \in \mathbb{R}$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{y+4}{3} \\ \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y+4}{3}} \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{y+4}{3}} \notin \mathbb{R}^+$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$ admet zéro ou une solution dans $\mathbb{R}^+$

Alors f est injective.

Exercice 6 :

Reconnaissons les applications ou restriction d'application parmi les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2-3x+4}{x^2-1}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} \subset \mathbb{R}$$

f est une restriction d'application.

$g :]-\frac{1}{2} ; 2[\cup]2 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 4 + \frac{1}{(x-2)\sqrt{3x+1}}$$

$$D_g = \{x/x \in \mathbb{R} ; x-2 \neq 0 \text{ et } 3x+1 > 0\}$$

$$x-2 = 0 \text{ et } 3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$3x+1$				

$$D_g =]-\frac{1}{3} ; 2[\cup]2 ; +\infty[\subset]-\frac{1}{2} ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

g est une restriction d'application

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left| \frac{2x+1}{5-x} \right|$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{5\} \subset \mathbb{R}$$

h est une restriction d'application

Exercice 7 :

1) Déterminons l'ensemble B pour que f soit surjective dans les cas suivants

* $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow B$

$$t \mapsto \frac{t}{t+2}$$

f est surjective si et seulement si, pour tout $y \in B$, l'équation $f(t) = y$ admet une ou deux solutions dans $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$\forall y \in B, f(t) = y \Leftrightarrow \frac{t}{t+2} = y \Leftrightarrow t = yt + 2y \Leftrightarrow t(y-1) = -2y \Leftrightarrow t = \frac{-2y}{y-1}$$

Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}$, l'équation $f(t) = y$ a une solution unique. Alors f est bijection, donc f est surjective

Conclusion :

L'ensemble B pour que f soit surjective est $B = \mathbb{R} - \{1\}$

$$* f : [1 ; 4] \rightarrow B$$

$$a \mapsto \sqrt{-a^2 + 5a - 4}$$

$$\forall y \in B, f(a) = y \Leftrightarrow \sqrt{-a^2 + 5a - 4} = y \Leftrightarrow -a^2 + 5a - 4 = y^2$$

$$a^2 - 5a + 4 = -y^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = -y^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = -y^2 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-4y^2 + 9}{4} \Leftrightarrow a - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{-4y^2 + 9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{-4y^2 + 9} + 5}{2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{-\sqrt{-4y^2 + 9} + 5}{2}$$

Pour que f soit surjective, il faut et il suffit que $-4y^2 + 9 \geq 0$

$$-4y^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-4y^2 + 9$				

Sur $x \in \left[-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right]$; $-4y^2 + 9 \geq 0$

Conclusion :

L'ensemble B pour que f soit surjective est $B = \left[-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right]$

2) Déterminer l'ensemble B pour que f soit bijective dans les cas suivants

$$* f : \mathbb{R}^+ \rightarrow B$$

$$x \mapsto 2x^2 + 5$$

f est bijective si et seulement si, pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}^+$.

$$\forall y \in B, f(x) = y \Leftrightarrow 2x^2 + 5 = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{y-5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y-5}{2}} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{y-5}{2}} \notin \mathbb{R}^+$$

Pour que f soit bijective, il faut et il suffit que $y - 5 \geq 0$ c'est-à-dire $y \in [5 ; +\infty]$.

Conclusion :

L'ensemble B pour que f soit bijective est $B = [5 ; +\infty]$

$$* h : [-2 ; +\infty[\rightarrow B$$

$$x \mapsto \sqrt{x+2}$$

$$\forall y \in B, f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = y \Leftrightarrow x+2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2$$

Conclusion :

L'ensemble B pour que f soit bijective est $B = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Exercice 8 :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = 2x - 7 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$$

1°) Les images par f de $(-5) ; 0 ; 5$ sont :

$$f(-5) = 2(-5) - 7 = -10 - 7 = -17 \Leftrightarrow f(-5) = -17$$

$$f(0) = 2(0) - 7 = -7 \Leftrightarrow f(0) = -7$$

$$f(5) = 2(5) - 7 = 10 - 7 = 3 \Leftrightarrow f(5) = 3$$

2°) Les images par g de $(-3) ; 1 ; 3$ sont :

$$g(-3) = \frac{3(-3)-1}{(-3)+2} = \frac{-10}{-1} = 10 \Leftrightarrow g(-3) = 10$$

$$g(1) = \frac{3(1)-1}{(1)+2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow g(1) = \frac{2}{3}$$

$$g(3) = \frac{3(3)-1}{(3)+2} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow g(3) = \frac{8}{5}$$

3°) Les antécédents de 14 ; $(-4) ; 5$ par f sont :

$$f(x) = 14 \Leftrightarrow 2x - 7 = 14 \Leftrightarrow 2x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{2}$$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow 2x - 7 = -4 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow 2x - 7 = 5 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$$

4°) Les antécédents de 11 ; 2 ; 7 par g sont :

$$g(x) = 11 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} = 11 \Leftrightarrow 3x-1 = 11x+22 \Leftrightarrow 8x = -23 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{8}$$

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} = 2 \Leftrightarrow 3x-1 = 2x+4 \Leftrightarrow x = 5$$

$$g(x) = 7 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} = 7 \Leftrightarrow 3x-1 = 7x+14 \Leftrightarrow 4x = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{15}{4}$$

Exercice 9 :

Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$$f(x) = x + x^2 \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{x-2}.$$

1) donnons les domaines de définition D_f et D_g de f et de g .

$D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

2) f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $D_f = \mathbb{R}$.

g n'est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $D_g \neq \mathbb{R}$ mais,

g est une restriction d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $D_g = \mathbb{R} - \{2\} \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3) \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4y+1}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{\pm\sqrt{4y+1}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{4y+1}-1}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\sqrt{4y+1}-1}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet zéro, une ou deux solutions dans $\mathbb{R}$

Conclusion :

L'application f n'est ni injective, ni surjective, ni bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $U(x) = g \circ f(x)$ et $V(x) = f \circ g(x)$. Calculons $U(x)$ et $V(x)$

puis donnons D_U et D_V .

$$U(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{f(x)}{f(x)-2} = \frac{(x^2+x)}{(x^2+x)-2} = \frac{x^2+x}{x^2+x-2}$$

$$U(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x-2}$$

$$V(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 + g(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$V(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2+x^2-2x}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-2x}{(x-2)^2}$$

$$V(x) = \frac{2x^2-2x}{(x-2)^2}$$

$$D_U = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 + x - 2 \neq 0\}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = -2$$

$$D_U = \mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$$

$$D_V = \{x/x \in \mathbb{R} ; (x-2)^2 \neq 0\}$$

$$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$D_V = \mathbb{R} - \{2\}$$

Exercice 10 :

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \left| \frac{x+1}{x-2} \right|$; $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$

1) Exprimons f sans le symbole de la valeur absolue.

Posons $x+1=0$ et $x-2=0$

$$x = -1 \text{ et } x = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	$\circ$	+	+
$x-2$	-	-	$\circ$	+
$\frac{x+1}{x-2}$	+	-	+	+
$\left \frac{x+1}{x-2} \right $	$\frac{x+1}{x-2}$	$\frac{-x-1}{x-2}$	$\frac{x+1}{x-2}$	$\frac{x+1}{x-2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & \text{si } x \in]-\infty ; -1] \cup]2 ; +\infty[\\ \frac{-x-1}{x-2} & \text{si } x \in [-1 ; 2[\end{cases}$$

2) Trouver un ensemble A sur lequel f et g coïncident et un ensemble B sur

lequel $f \neq g$.

f et g Coïncident sur $A =]-\infty ; -1] \cup]2 ; +\infty[$

$f \neq g$ sur $[-1 ; 2[$

Exercice 11 :

I- Soit $f : [3 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[$ définie par

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1) Déterminons deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1 \text{ donc } a = 2 \text{ et } b = 1$$

2) Utilisons ce résultat de la première question pour montrer que

si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) \in [0 ; +\infty[$. Que peut-on alors dire de f .

$$x \in [3 ; +\infty[\Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \in [0 ; +\infty[$$

conclusion :

$$\forall x \in [3 ; +\infty[\Leftrightarrow f(x) \in [0 ; +\infty[\text{ alors } f([3 ; +\infty[) = [0 ; +\infty[$$

3) Soit $y \in [0 ; +\infty[$

a) Le nombre de solutions dans $[3 ; +\infty[$ de $f(x) = y$ est :

$$\forall y \in [0 ; +\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 1 = y \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y + 1} + 2 \text{ ou } x = -\sqrt{y + 1} + 2$$

$$x = \sqrt{y + 1} + 2 \in [3 ; +\infty[\text{ ou } x = -\sqrt{y + 1} + 2 \notin [3 ; +\infty[$$

Conclusion :

$$\forall y \in [0 ; +\infty[, \text{ l'équation } f(x) = y \text{ admet une solution unique}$$

$$S = \{\sqrt{y + 1} + 2\}$$

b) f est-elle injective ? Est-elle bijective ?

$\forall y \in [0 ; +\infty[, \text{ l'équation } f(x) = y \text{ admet une solution unique, alors la fonction } f \text{ est bijective}$

II- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifions

$\forall y \in \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[;$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = y \Leftrightarrow 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = y$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right] = y \Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right] = y$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{y}{3} - \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3y - 4}{9} \Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = \frac{\pm\sqrt{3y - 4}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3y - 4} + 1}{3} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{3y - 4} + 1}{3}$$

Conclusion :

$$\forall y \in \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[, \text{ l'équation } f(x) = y \text{ admet deux solutions dans } \mathbb{R}$$

Alors f est surjective

III- Soit $g : [-1 ; 1] \rightarrow A$

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}.$$

Déterminons A pour que la fonction g soit surjective

f est surjective si et seulement si pour tout $y \in A ; f(x) = y$ admet au moins une solution dans $[-1 ; 1]$

$$y \in A ; f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = y \Leftrightarrow 1 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{1 - y^2} \text{ ou } x = -\sqrt{1 - y^2}$$

$f(x) = y$ admet deux solutions dans $[-1 ; 1]$ ssi $1 - y^2 \geq 0$

$$1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1 ; 1]$$

D'après le tableau de signe de $y \in [-1 ; 1]$

Conclusion :

La fonction g est surjective pour $A = [-1 ; 1]$.

Exercice 12 :

Soient les fonctions p et q définies par :

$$p :]-3 ; 5] \rightarrow \mathbb{R} ; \quad q : [3 ; 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x + 1| + |2 - x| \quad x \mapsto 2x - 1$$

1) Ecrivons p sans le symbole de la valeur absolue.

Posons $x + 1 = 0$ et $2 - x = 0$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{et} \quad 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$ x + 1 $	$-x - 1$		$x + 1$	$x + 1$
$2 - x$	$+$	$+$	$\circ$	$-$
$ 2 - x $	$2 - x$		$2 - x$	$-2 + x$
$p(x)$	$-2x + 1$		3	$2x - 1$

$$p(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \in]-\infty ; -1] \\ 3 & \text{si } x \in [-1 ; 2] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [2 ; +\infty[\end{cases}$$

2) La restriction de p à l'intervalle $[0 ; 1]$ est :

$[0 ; 1]$ est un sous ensemble de $[-1 ; 2]$, alors la restriction de p à

l'intervalle $[0 ; 1]$ est : $f|_{[-1 ; 2]}(x) = 3$

3) L'application q est-elle la restriction de p dans $[3 ; 4]$?

$[3 ; 4]$ est un sous ensemble de $[2 ; +\infty[$. Alors, l'application q telle que :

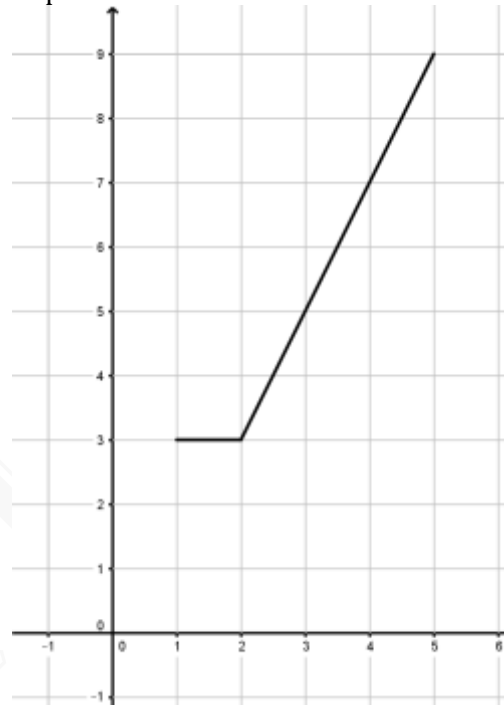
$$q : [3 ; 4] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est la restriction de } p \text{ dans } [3 ; 4]$$

$$x \mapsto 2x - 1$$

4) Trouvons le prolongement de q à $[1 ; 5]$ est : (On donnera une représentation graphique de p).

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in [1 ; 2] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [2 ; 5] \end{cases}$$

Représentation :

**Exercice 13 :**

Soit f et g les fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = 2x - |2 - 2x| + |x + 1| \quad \text{et} \quad g(x) = 3x - 3$$

1) Ecrivons $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

Posons $2 - 2x = 0$ et $x + 1 = 0$

$$2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{et} \quad x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$2 - 2x$	$+$	$+$	$\circ$	$-$
$ 2 - 2x $	$2 - 2x$		$2 - 2x$	$-2 + 2x$
$x + 1$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$ x + 1 $	$-x - 1$		$x + 1$	$x + 1$
$p(x)$	$3x - 3$		$5x - 1$	$x + 3$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x \in]-\infty ; -1] \\ 5x - 1 & \text{si } x \in [-1 ; 1] \\ x + 3 & \text{si } x \in [1 ; +\infty[\end{cases}$$

2) Déterminons le plus grand ensemble B sur lequel f et g coïncident.
le plus grand ensemble B sur lequel f et g coïncident est $B =]-\infty ; -1]$

Exercice 14 :

Soient les fonctions f ; g définies respectivement par :

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} ; g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1} \quad x \mapsto 3x - 2$$

1) Les fonctions f et g sont-elles des bijections ?

* $\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}$, résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = y \Leftrightarrow x = yx - y \Leftrightarrow x(y-1) = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1} \in \mathbb{R} - \{1\} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, \text{l'équation } f(x) = y \text{ admet une solution unique } S = \left\{ \frac{y}{y-1} \right\}.$$

Alors la fonction f est bijective

* $\forall y \in \mathbb{R}^*$, résolvons dans $\mathbb{R} - \{1\}$ l'équation $g(x) = y$

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, g(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}$$

Pour $y = 1$ on a : $x = 1 \notin \mathbb{R} - \{1\}$

Conclusion :

$\forall y \in \mathbb{R}^*$ l'équation $g(x) = y$ admet zéro ou une solution dans $\mathbb{R} - \{1\}$.

Alors la fonction g n'est pas bijective.

2) Calculons $f \circ g(0)$; $g \circ f(0)$; $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

$$* f \circ g(0) = ?$$

$$g(0) = -2, \text{ donc } f \circ g(0) = f[g(0)] = f(-2) = \frac{-2}{-2-1} = \frac{2}{3}$$

$$f \circ g(0) = \frac{2}{3}$$

$$* g \circ f(0) = ?$$

$$f(0) = 0, \text{ donc } g \circ f(0) = g[f(0)] = g(0) = -2 \Leftrightarrow g \circ f(0) = -2$$

3) Trouvons $f([-2 ; -1])$; $g([-2 ; 0])$; $f^{-1}([2 ; 3[)$; $f^{-1}(]-\infty ; 0])$

$$* f([-2 ; -1]) = ? \quad f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\forall x \in [-2 ; -1] \text{ et } x \in D_f \text{ alors } x \in [-2 ; -1]$$

$$\text{On a : } -2 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-1} \leq -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} \right]$$

$$\text{D'où } f([-2 ; -1]) = \left[\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} \right]$$

$$* g([-2 ; 0]) = ?$$

$$\forall x \in [-2 ; 0] \text{ et } x \in D_g \text{ alors } x \in [-2 ; 0]$$

$$\text{On a : } -2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq 3x \leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq 3x - 2 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq f(x) \leq -2 \Leftrightarrow f(x) \in [-8 ; -2]$$

$$* f^{-1}([2 ; 3[) = ?$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

$$\forall x \in [2 ; 3[\text{ et } x \in D_{f^{-1}} \text{ alors } x \in [2 ; 1[\cup]1 ; 3[$$

$$\text{On a : } 2 \leq x < 3 \text{ ou } 1 < x < 3$$

$$1 \leq x-1 \leq 2 \text{ ou } 0 < x-1 < 2$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 1 \text{ ou } \frac{1}{x-1} > 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-1} \leq 2 \text{ ou } 1 + \frac{1}{x-1} > 3$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq 2 \text{ ou } f^{-1}(x) > 3$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) \in]-\infty ; 2] \cup]3 ; +\infty[$$

$$\text{Donc } f^{-1}([2 ; 3[) =]-\infty ; 2] \cup]3 ; +\infty[$$

$$* f^{-1}(]-\infty ; 0]) = ?$$

$$\forall x \in]-\infty ; 0[\text{ et } x \in D_{f^{-1}} \text{ alors } x \in]-\infty ; 0[$$

$$\text{On a : } x < 0 \Leftrightarrow x-1 < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > -1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) \in]0 ; +\infty[$$

$$\text{Donc } f^{-1}(]-\infty ; 0]) =]0 ; +\infty[$$

4) Résolvons l'équation $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = 3x - 2 \Leftrightarrow x = (x-1)(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 3x + 2 - x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - (3)(2) = 9 - 6 = 3$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \text{ et } x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

D'où $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{3}}{3} ; \frac{3+\sqrt{3}}{3} \right\}$

5) Sur quel intervalle I , f et g coïncident ?

f et g Coïncident sur l'ensemble $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{3}}{3} ; \frac{3+\sqrt{3}}{3} \right\}$

Exercice 15 :

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 - x - 2$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1) Trouvons l'image directe par g de : $A = [-1 ; 4]$; $B = [-2 ; 0]$; $C =]3 ; +\infty[$.

$g(x) = \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

* $g(A) = ?$

$\forall x \in A = [-1 ; 4]$ et $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ alors $[-1 ; 2[\cup]2 ; 4]$

On a : $-1 \leq x < 2$ ou $2 < x \leq 4$

$-3 \leq x - 2 < 0$ ou $0 < x - 2 \leq 2$

$-\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-2}$ ou $\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{2}$

$-1 \geq \frac{3}{x-2}$ ou $\frac{3}{x-2} \geq \frac{3}{2}$

$0 \geq 1 + \frac{3}{x-2}$ ou $1 + \frac{1}{x-2} \geq \frac{5}{2}$

$0 \geq g(x)$ ou $g(x) \geq \frac{5}{2}$

$g(x) \in]-\infty ; 0] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty \right[$

$g(A) = g([-1 ; 4]) =]-\infty ; 0] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty \right[$

* $g(B) = ?$

$x \in B = [-2 ; 0]$ et D_g alors $x \in [-2 ; 0]$

On a : $-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x - 2 \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{3}{x-2} \leq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow g(x) \in \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \right]$

D'où $g(B) = g([-2 ; 0]) = \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \right]$

* $g(C) = ?$

$\forall x \in C =]3 ; +\infty[$ et $x \in D_g$ alors $x \in]3 ; +\infty[$

On a : $3 < x \Leftrightarrow 1 < x - 2 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow 3 > \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow 4 > 1 + \frac{3}{x-2}$

$\Leftrightarrow 4 > g(x) \Leftrightarrow g(x) \in]-\infty ; 4[$

D'où $g(C) = g(]3 ; +\infty[) =]-\infty ; 4[$

2) Déterminons $f^{-1}\left(\left\{6 ; -4 ; -\frac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}([-2 ; 0])$.

$f(x) = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

* $f^{-1}\left(\left\{6 ; -4 ; -\frac{1}{2}\right\}\right) = ?$

$- f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0$

$x^2 - x - 8 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-8) = 1 + 32 = 33$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$

$- f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = -4 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$

$x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7 < 0$. Donc pas de solution

$- f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta' = (-1)^2 - (2)(-3) = 1 + 9 = 10$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{10}}{2}$

$f^{-1}\left(\left\{6 ; -4 ; -\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{ \left\{ \frac{1-\sqrt{33}}{2} ; \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right\} ; \{ \} ; \left\{ \frac{1-\sqrt{10}}{2} ; \frac{1+\sqrt{10}}{2} \right\} \right\}$

* $f^{-1}([-2 ; 0]) = ?$

$\forall f(x) \in [-2 ; 0]$ et $x \in D_f$ on a :

$-2 \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [1 ; 2]$

D'où $f^{-1}([-2 ; 0]) = [1 ; 2]$

3) Déterminons $f([-1 ; 2])$.

* $f([-1 ; 2]) = ?$

$\forall x \in [-1 ; 2]$ et $x \in D_f$ alors $x \in [-1 ; 2]$

On a : $-1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

D'où $f([-1 ; 2]) = \{0\}$

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

* Pour $x \in]-\infty ; -1]$, $f(x) = -x + 2$

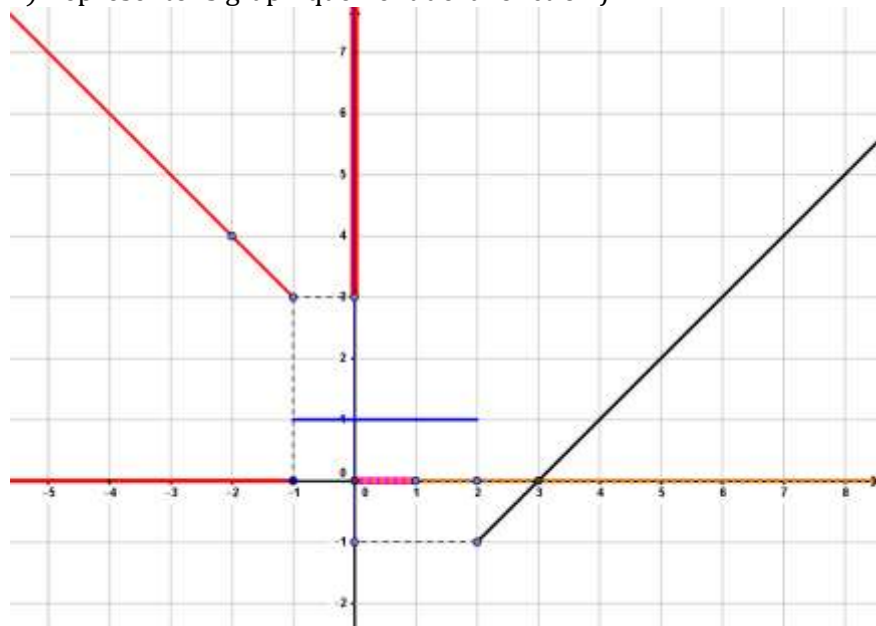
x	-2	-1
$f(x)$	4	3

* Pour $x \in]-1 ; 2[$, $f(x) = 1$ constant

* Pour $x \in [2 ; +\infty[$, $f(x) = x - 3$

x	2	3
$f(x)$	5	

1) Représentons graphiquement de la fonction f .



2) Déterminer l'image par f des intervalles :

$]-\infty ; -1]$; $[0 ; +\infty[$; $[0 ; 1]$

Graphiquement :

$f(]-\infty ; -1]) = [3 ; +\infty[$; $f([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$;

$f([0 ; 1]) = \{1\}$

Exercice 17 :

Soit g la fonction définie par : $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{3x-2}$$

Démontrons que g est bijective puis explicitons sa bijection réciproque.

g est bijective si et seulement si, pour tout $y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, l'équation

$g(x) = y$ admet une solution unique dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{3x-2} = y \Leftrightarrow x+1 = 3xy-2y$

$$\Leftrightarrow x(3y-1) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{3y-1}$$

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ l'équation $g(x) = y$ admet une solution unique S

dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ telle que $S = \left\{\frac{2y+1}{3y-1}\right\}$. Alors g est bijective, et bijection

réciproque est g^{-1} telle que :

$g^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{3x-1}$$

Exercice 18 :

soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$.

1) Déterminons l'ensemble de définition de h .

$D_h = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Déterminons les réels a et b tels que pour tout $x \in D_h$; $h(x) = a +$

$\frac{b}{x-1}$. Puis déterminons l'image directe par h de chacun des ensembles

suivants :

$$A = [-1 ; 2] \quad ; \quad B = [-1 ; 1] \quad ; \quad C = \left\{-2 ; -1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right\}$$

$$h(x) = a + \frac{b}{x-1} \Leftrightarrow \frac{ax-a+b}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -a+b = 3 \Leftrightarrow 2+b = 3 \Leftrightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$a = -2 \text{ et } b = 1 \text{ alors } h(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$$

$$h(A) = ?$$

$$\forall x \in A = [-1 ; 2] \text{ et } x \in D_h = \mathbb{R} - \{1\} \text{ alors } x \in [-1 ; 1[\cup]1 ; 2]$$

$$\text{On a : } -1 \leq x < 1 \text{ ou } 1 < x \leq 2$$

$$-2 \leq x-1 \leq 0 \text{ ou } 0 < x-1 \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x-1} \text{ ou } \frac{1}{x-1} \geq 1$$

$$-\frac{5}{2} \geq -2 + \frac{1}{x-1} \text{ ou } -2 + \frac{1}{x-1} \geq -1$$

$$-\frac{5}{2} \geq h(x) \text{ ou } h(x) \geq -1$$

$$h(x) \in \left] -\infty ; -\frac{5}{2} \right] \cup [1 ; +\infty[$$

$$\text{Donc } h(A) = h([-1 ; 2]) = \left] -\infty ; -\frac{5}{2} \right] \cup [1 ; +\infty[$$

$$h(B) = ?$$

$$\forall x \in B = [-1 ; 1] \text{ et } x \in D_h = \mathbb{R} - \{1\} \text{ alors } x \in [-1 ; 1[$$

$$\text{On a : } -1 \leq x < 1 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \geq -2 + \frac{1}{x-1} \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \geq h(x) \Leftrightarrow h(x) \in \left] -\infty ; -\frac{5}{2} \right]$$

$$\text{D'où } h(B) = h([-1 ; 1]) = \left] -\infty ; -\frac{5}{2} \right]$$

$$C = \left\{-2 ; -1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right\} = ?$$

$$h(-2) = \frac{-2(-2)+3}{(-2)-1} = \frac{7}{-3} \Leftrightarrow h(-2) = -\frac{7}{3}$$

$$h(-1) = \frac{-2(-1)+3}{(-1)-1} = \frac{5}{-2} \Leftrightarrow h(-1) = -\frac{5}{2}$$

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{\left(-\frac{1}{2}\right)-1} = \frac{4}{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)+3}{\left(\frac{1}{2}\right)-1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$h(1) = \frac{-2(1)+3}{(1)-1} = \frac{1}{0} \Leftrightarrow h(1) = \emptyset$$

$$h(C) = h\left(\left\{-2 ; -1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right\}\right) = \left\{-\frac{7}{3} ; -\frac{5}{2} ; -\frac{8}{3} ; -4 ; \emptyset\right\}$$

Exercice 19:

Soient les fonctions f, g et h définies respectivement par :

$$f(x) = 3x - 1 ; g(x) = -5x + 2 ; h(x) = x^2 + 1$$

1°) Trouvons les images directes par f de chacun des intervalles

$$A = [-5, 4] ; B =]3, 8[; C =]-9, 0[; D = [-11, -8]$$

$$f(A) = ?$$

$$\forall x \in A = [-5, 4] \text{ et } x \in D_f = \mathbb{R} \text{ alors } x \in [-5, 4]$$

$$\text{On a : } -5 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -15 \leq 3x \leq 12 \Leftrightarrow -16 \leq 3x - 1 \leq 11$$

$$\Leftrightarrow -16 \leq f(x) \leq 11 \Leftrightarrow f(x) \in [-16 ; 11]$$

$$f(A) = f([-5, 4]) = [-16 ; 11]$$

$$f(B) = ?$$

$$\forall x \in B =]3, 8[\text{ et } x \in D_f, x \in]3, 8[$$

$$\text{On a : } 3 < x < 8 \Leftrightarrow 9 < 3x < 24 \Leftrightarrow 8 < 3x - 1 < 23 \Leftrightarrow x \in]8 ; 23[$$

$$\text{Donc } f(B) = f(]3 ; 8[) =]8 ; 23[$$

$$f(C) = ?$$

$$\forall x \in C =]-9, 0[\text{ et } x \in D_f, x \in]-9, 0[$$

$$\text{On a : } -9 < x \leq 0 \Leftrightarrow -27 < 3x \leq 0 \Leftrightarrow -28 < 3x - 1 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in]-28 ; -1]$$

$$\text{Donc } f(C) = f(]-9, 0[) =]-28 ; -1]$$

$$f(D) = ?$$

$$\forall x \in D = [-11, -8] \text{ et } x \in D_f, x \in [-11, -8]$$

$$\text{On a : } -11 \leq x \leq -8 \Leftrightarrow -33 \leq 3x \leq -24 \Leftrightarrow -34 \leq 3x - 1 \leq -25$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in [-34 ; -25]$$

$$\text{Donc } f(D) = f([-11, -8])$$

2°) Trouver les images directes par g de chacun des intervalles

$$A = [-5 ; 4] ; B =]3 ; 8[; C =]-9 ; 0[; D = [-11 ; -8]$$

$$g(x) = -5x + 2$$

$g(A) = ?$

$\forall x \in A = [-5 ; 4]$ et $x \in D_g$, $x \in [-5 ; 4]$

$$\text{On a : } -5 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -20 \leq -5x \leq 25 \Leftrightarrow -18 \leq -5x + 2 \leq 27 \\ \Leftrightarrow g(x) \in [-18 ; 27]$$

$$\text{Donc } g(A) = g([-5 ; 4]) = [-18 ; 27]$$

$g(B) = ?$

$x \in B =]3 ; 8[$ et $x \in D_g$, $x \in]3 ; 8[$

$$\text{On a : } 3 < x < 8 \Leftrightarrow -40 < -5x < -15 \Leftrightarrow -38 < -5x + 2 < -13 \\ \Leftrightarrow -38 < g(x) < -13 \Leftrightarrow g(x) \in]-38 , -13[$$

$$\text{Donc } g(B) = g(]3 ; 8[) =]-38 , -13[$$

$g(C) = ?$

$\forall x \in C =]-9 ; 0]$ et $x \in D_g$, $x \in]-9 ; 0]$

$$\text{On a : } -9 < x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -5x < 45 \Leftrightarrow 2 \leq -5x + 2 < 47 \Leftrightarrow 2 \leq g(x) < 47 \\ \Leftrightarrow g(x) \in [2 ; 47[$$

$$\text{Donc } g(C) = g(]-9 ; 0]) = [2 ; 47[$$

$g(D) = ?$

$\forall x \in D = [-11 ; -8]$ et $x \in D_g$, $x \in [-11 ; -8]$

$$\text{On a : } -11 \leq x \leq -8 \Leftrightarrow 40 \leq -5x \leq 55 \Leftrightarrow 38 \leq -5x + 2 \leq 53 \\ \Leftrightarrow 38 \leq g(x) \leq 53 \Leftrightarrow g(x) \in [38 ; 53]$$

$$\text{Donc } g(D) = g([-11 ; -8]) = [38 ; 53]$$

3°) Trouver les images directes par h de chacun des intervalles

$$I = [0, 5] ; J =]6, 8[; K = [-4 ; -1]$$

$$h(x) = x^2 + 1$$

$h(I) = ?$

$\forall x \in I = [0 ; 5]$ et $x \in D_h$, $x \in [0 ; 5]$

$$\text{On a : } 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 25 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 26 \Leftrightarrow 1 \leq h(x) \leq 26 \\ \Leftrightarrow h(x) \in [1 ; 26]$$

$$\text{Donc } h(I) = h([0 ; 5]) = [1 ; 26]$$

$h(J) = ?$

$\forall x \in J =]6 ; 8[$ et $x \in D_h$ alors $x \in]6 ; 8[$

$$\text{On a : } 6 < x < 8 \Leftrightarrow 36 < x^2 < 64 \Leftrightarrow 37 < x^2 + 1 < 65 \Leftrightarrow 37 < h(x) < 65 \\ \Leftrightarrow h(x) \in]37 ; 65[$$

$$\text{Donc } h(J) = h(]6 ; 8[) =]37 ; 65[$$

$h(K) = ?$

$\forall x \in K = [-4 ; -1]$ et $x \in D_h$, $x \in [-4 ; -1]$

$$\text{On a : } -4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow 2 \leq h(x) \leq 17 \\ \Leftrightarrow h(x) \in [2 ; 17]$$

$$\text{Donc } h(K) = h([-4 ; -1]) = [2 ; 17]$$