

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT : 11^{ème} Sciences 2017-2018

Les applications :

Exercice 1 :

Dans les cas suivants dit si la fonction est une application injective, surjective ou bijective.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 3x$$

$$i:]0; \pi] \rightarrow]0; 1]$$

$$x \mapsto \sin x$$

$$k: [-1; 2] \rightarrow [0; 4]$$

$$x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

$$j: [-2; 2] \rightarrow [1; 5]$$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

$$l: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto (x - y, 3 + y)$$

$$h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto (x - y, 3 + y)$$

$$j: [0; 2] \rightarrow [0; 4]$$

$$x \mapsto x^2$$

$$m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y$$

Exercice 2 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

Soient $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$

1. Détermine le domaine de définition de f et g .
2. f et g sont-elles bijective ? justifiez votre réponse.
3. Démontre que pour tout réels x on a : $0 < f(x) \leq 1$. Interprète ce résultat.
4. Ecris $g(x)$ sous forme canonique.
5. En utilisant 3. et 4. Prouve que pour tout réels x on a : $2 \leq g(x) < 3$. Interprète ce résultat

Exercice 4 :

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{4 + x^2}{2}$$

- 1) Déterminer l'image directe par f des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \mathbb{R}^+; B = [2; 6]; C = \{0; 2; 6\}.$$

- 2) Déterminer l'image réciproque par f de :

$$P = [2; 10]; K =]3; 4[; J = \{0\}.$$

- 3) l'application f est-elle bijective ? si oui déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5 :

I. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

- 1) Mettre $f(x)$ sous la forme canonique.
- 2) Trouver l'image directe par f de :

- a) $A = [1 ; 3]$; b) $B = [-3 ; -2]$; c) $D = [-2 ; 3]$.
2°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.
Déterminer $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{-2\})$.

Exercice 6 :

Soit $f: [3 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- 1) Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$
- 2) Utiliser ce résultat de la première question pour montrer que si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) \in [0 ; +\infty[$. Que peut-on alors dire de f .
- 3) Soit $y \in [0 ; +\infty[$
 - a) Quel est le nombre de solutions dans $[3 ; +\infty[$ de $f(x) = y$?
 - b) f est-elle injective ? est-elle bijective ?

Exercice 7 :

Soient les fonctions f et g définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$x \mapsto g(x) = 3x - 2$$

- 1) Les fonctions f et g sont-elles des bijections ?
- 2) Calculer $f \circ g(0)$; $g \circ f(0)$; $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
- 3) Trouver $f([-2 ; -1])$; $g([-2 ; 0])$; $f^{-1}([2 ; 3])$; $f^{-1}([-\infty ; 0])$.
- 4) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
- 5) Sur quel intervalle I , f et g coïncident ?

Exercice 8 :

- I. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |2x - 1| + |x - 3| - 1$$

- 1) Ecrire $f(x)$ sans les symboles de la valeur absolue.
- 2) Déterminer $f([-1 ; 1])$ et $f^{-1}([5 ; +\infty[)$.

- II. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -4x - 5$$

Déterminer la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

- III. Trouver deux fonctions f et g telles que $h(x) = (f \circ g)(x)$ dans les cas suivants a) $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$; b) $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; c) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$;
d) $h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2}$; e) $h(x) = (3x + 1)^2$; f) $h(x) = (x + 5)^2 + 4$

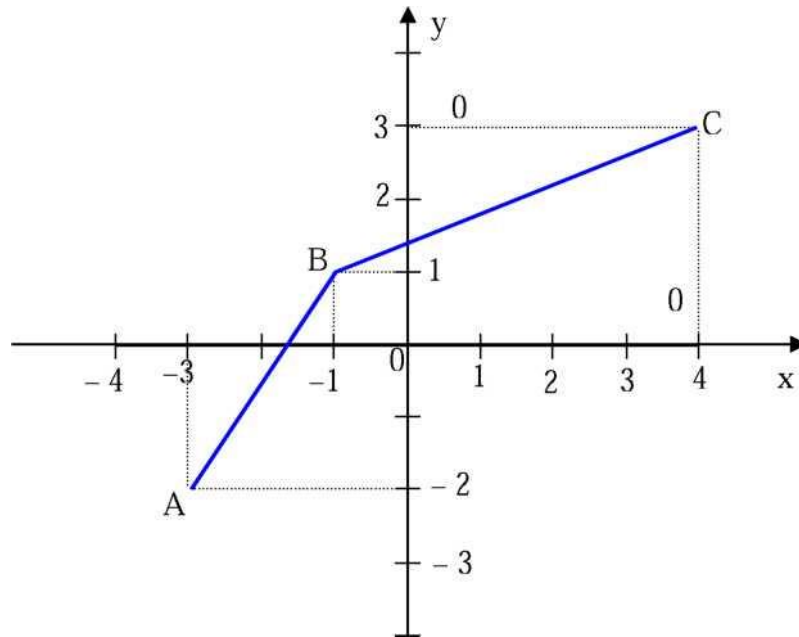
Exercice 9 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + |x - 2| + 3$.

- a) Écrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- b) Donner la restriction g de f à l'intervalle $[2 ; +\infty[$
- c) On donne $I = [3 ; 5]$ et $J = [9 ; 10]$. Trouver $g(I)$ puis $g^{-1}(J)$

Exercice 10 :

Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous



- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ;
- 2) Trouver l'image directe par f des intervalles suivants :
 $A = [-3 ; -1]$; $B =] -1 ; 4[$; $C = \{-3 ; -1\}$; $D = \{0\}$
- 3) Trouver l'image réciproque par f des intervalles suivants :
 $E =] 1 ; 3 [$; $F =] -\infty ; -3]$; $G =] -\infty ; -2]$; $H = [-2 ; 3]$; $I = \{0\}$
- 4) Donner les formules explicites de $f(x)$;
- 5) Montrer que f est bijective et tracer dans le même repère la courbe de sa bijection réciproque.