

APPLICATIONS 1^{re} Sciences LPMT 22-23 LPMT



EXERCICE1:

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x) = \sqrt{-x}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$; 3) $G(x) = \sqrt{1-x}$; 4) $H(x) = \frac{2x}{3x+7}$ 5) $I(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$

6) $J(x) = \sqrt{|-x|}$; 7) $R(x) = \frac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$ 8) $M(x) = \frac{2x-3}{6x^2-1.3x-5}$

9) $N(x) = \frac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$ 10) $L(x) = \frac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$

EXERCICE2: Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont des applications :

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+3}$$

b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-4}{x-2}$$

e) $f_5:]-\infty; -5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+3}{x^2+3x-4}$$

c) $f_3: [6; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x-5}$$

d) $f_4:]-\infty; -1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{-2-x}$$

f) $f_6: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+3}{x^2-8}$$

g) $f_7: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x|$$

h) $f_8: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\sqrt{x}$$

i) $f_9: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x-2}$$

j) $f_{10}: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

k) $f_{11}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

l) $f_{12}: [0; 2[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

m) $f_{13}:]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x-3}$$

n) $f_{14}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_{14}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

p) $f_{16}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto f_{16}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

q) $f_{17}: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_{17}(x) = \sqrt{x^2-1} + 3$$

o) $f_{15}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_{15}(x) = \sqrt{x+2}$$

EXERCICE3: 1) Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |2x-1| + |x-3| - 1$$

a) Ecrire sans le symbole valeur absolue.

b) Trouver l'image directe par de -1 ; -4 ; 0 ; 2 et $[-1; 1]$ (on représentera la fonction graphiquement dans un repère)

2) Parmi les applications ci-dessous, cite, en justifiant, celles qui sont injectives

a) $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x-2|$$

b) $g_2: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

c) $g_3: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$

d) $g_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+5}{x+2}$$

$$x \mapsto x^2 + 2x + 3$$

EXERCICE4 : 1) On considère l'application : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

(a) Résoudre suivant les valeurs de y , l'équation $g(x) = y$.

(b) En déduire deux ensembles I et J tels que g soit injective et surjective à la fois.

2) Soit la fonction $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1 + x^2}{2}$$

a) Pour chaque nombre réel y , résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1 + x^2}{2} = y$

b) Utiliser la question a) pour montrer que g est injective et pour déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R}_+)$ de g .

c) Montrer que l'application $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow g(\mathbb{R}_+)$ est bijective

$$x \mapsto \frac{1 + x^2}{2}$$

d) Préciser ce qu'est l'application réciproque f^{-1} de f .

EXERCICE5:

On donne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-4}{x-1}$$

$h: \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1; +\infty[$

$$x \mapsto h(x) = x^2 - 1$$

1) Calculer Df , Dg , $Dfog$, $Dgof$, $(gof)(2)$; $(fog)(0)$; $(fog)(x)$ et $(gof)(x)$.

2) Trouver le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ sur lequel g est une bijection et préciser sa réciproque g^{-1}

3) Calculer $f^{-1}(\{1\})$, $g([0,3[)$; $h^{-1}([-1; 1])$.

EXERCICE6: Soient U et V deux fonctions numériques définies par :

$$U(x) = x + x^2 ; \quad V(x) = \frac{x}{x-2}$$

1) Donner le domaine de définitions D_U et D_V de U et de V .

2) U et V sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? justifier

3) Résoudre l'équation $U(x) = 0$; l'application u est-elle injective? surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? justifier

4) Soit $f(x) = V \circ U(x)$ et $g(x) = U \circ V(x)$, Calculer $f(x)$ et $g(x)$ puis Df et Dg .

EXERCICE 7: Soient les fonctions f ; g ; définies respectivement par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: [0; 2] \rightarrow [0; 1]$$

$$h: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \mapsto 3x - 4$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 1$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1) Déterminer $f([0; 1])$; $f([-1; 2])$

2) g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3) Déterminer $h([-2; -1])$; $h^{-1}([2; 3])$

EXERCICE8 : 1) Soit $g: [-1; 1] \rightarrow A$

$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ Déterminer A pour que la fonction g soit surjective.

2) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2x-1}$$

$$x \mapsto \frac{3x+4}{2-x}$$

a) Déterminer Df ; Dg ; $Dfog$; $Dgof$;

b) Calculer fog ; gof .

c) Trouver la partie A de $\mathbb{R}$ telle que $h: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$ soit une application

d) Montrer que h est injective.

e) Trouver E et F tels que $i: E \rightarrow F$

$x \mapsto g(x)$ soit une bijection

f) Déterminer i^{-1} .

EXERCICE9 : Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |2x-1| + |1-x|$$

a) Exprimer f sans les signes de valeurs absolues.

b) Trouver une fonction g ; différentiable de f , qui coïncide avec f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

c) En déduire la courbe représentative de f .

EXERCICE10 :

On considère les applications suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$x \mapsto x^2 - 2x \quad x \mapsto \frac{2x-1}{3x-2}$$

1) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

b) f peut-elle être une bijection ? pourquoi?

2) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) \leq 3$

b) Déduis-en l'image réciproque de $]-\infty; 3]$ par f .

3) a) Démontre que g est une bijection .

b) Définie la bijection réciproque de g^{-1} de g .

c) Calcule $(g \circ g)(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

EXERCICE11 : Soit la fonction $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$$

a) Pour chaque nombre réel y , résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1+x^2}{2} = y$

b) Utiliser la question a) pour montrer que g est injective et pour déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R}_+)$ de g .

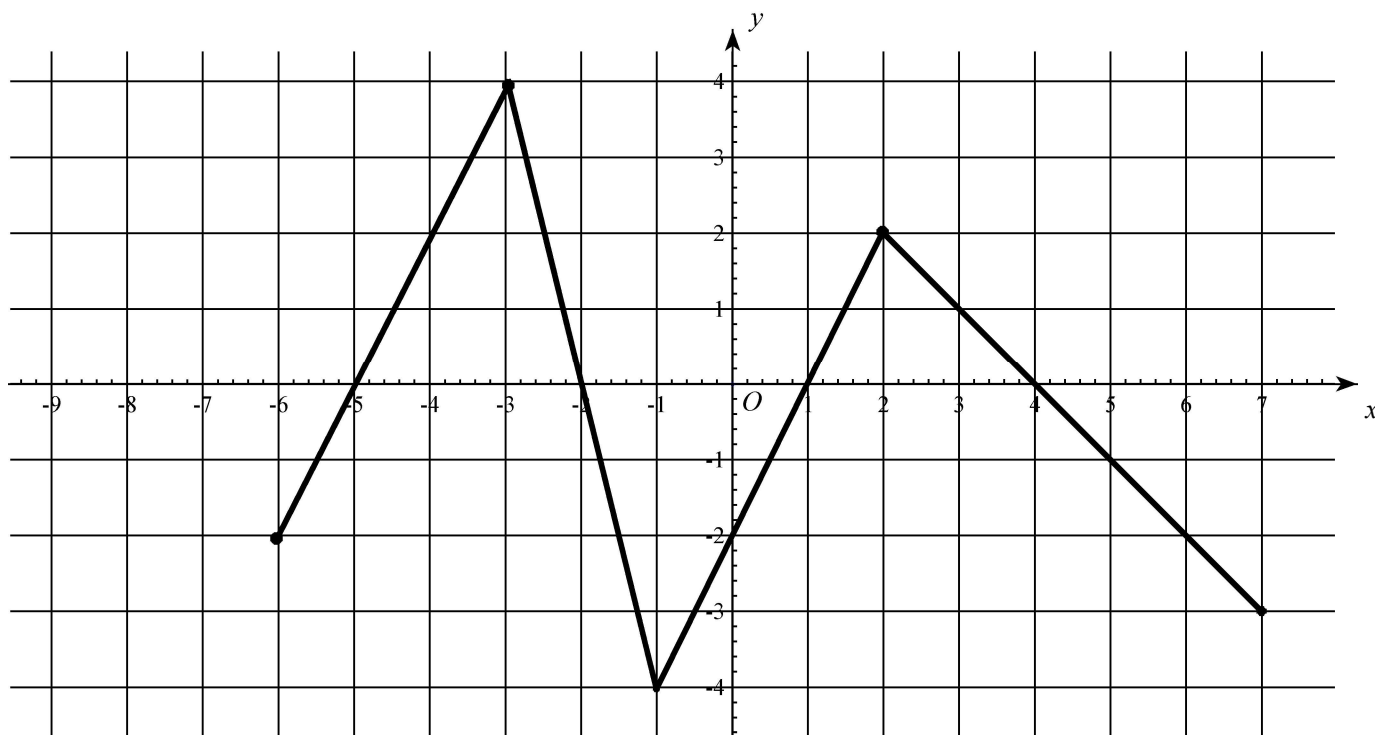
c) Montrer que l'application $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow g(\mathbb{R}_+)$ est bijective

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$$

d) Préciser ce qu'est l'application réciproque f^{-1} de f .

EXERCICE12 :

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 7]$.



1°) Quelles sont les images des réels 3, -2, -6 et 0 par f ?

2°) Quels sont les antécédents de 2?

3°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

4°) Quel est en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$?

5°) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

6°) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 2$.

