

Exercices sur les applications**Classe : 11^{ème} Sciences****Exercice 1 :** Détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$a^{\circ}) f(x) = -x^4 + 5x^3 + 4x - 1 ; b^{\circ}) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2 - x} ; c^{\circ}) f(x) = \sqrt{4 - x^2} ;$$

$$d^{\circ}) f(x) = \frac{\sqrt{-x+1}}{x^2 - 3x + 2} ; e^{\circ}) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{E(x) - 2} ; f^{\circ}) f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}} ; g^{\circ}) f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{E(x)+1}$$

Exercice 2 : Soit l'application f définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x-1}{-x+1}$$

1°) Détermine les ensembles de définition A de f .2°) Détermine B , l'image de A par f .3°) Soit l'application g définie par :

$$g: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{-x+1}$$

a°) Montre que g est bijectiveb°) En déduis l'expression de $g^{-1}(x)$ c°) Calcule $g([-1; 2[)$ d°) Calcule $g^{-1}([-1; 0])$ **Exercice 3 :** Soient les applications f, g et h définies par :

$$f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow [4; +\infty[$$

$$h: [4; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x-5}{x+1}$$

$$x \mapsto x^2 - 4$$

$$x \mapsto \sqrt{x - 4}$$

1°) Détermine les ensembles de définitions suivantes : $Df ; Dg ; Dh ; Df \circ g$ et $Dg \circ f$ 2°) a°) Détermine l'image directe par f et g de $A = \{-2; 1; 3\}$; $B = [-2; 0]$ b°) Détermine l'image directe par h de $E = \{5; 8\}$; $F =]5; 13[$ 3°) Détermine l'image réciproque par f et g de $G = \{-3; 0\}$; $H =]-1; 5]$ 4°) Les applications $f; g$ et h sont-elles bijectives? Si oui donne leur bijection réciproque.5°) les applications $f \circ g ; g \circ f$ et $h \circ f$ sont-elles bijectives? (justifier ta réponse sans faire de calculs).

Exercice 4 : Soient les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = |2 - x| - |3x + 9| + 2 \text{ et } g(x) = -2x - 9$$

1°) Ecris f sans le symbole de la valeur absolue

2°) quelle est la restriction de f à l'intervalle $] -3; 2[$

3°) Détermine un intervalle I sur lequel, les fonctions f et g coïncident.

4°) Représente graphiquement la fonction f sur $] -\infty, 2[$

5°) Détermine graphiquement $f([-6; -2])$ et $f^{-1}([-5; 7])$.

Exercice 5 : Parmi les fonctions suivantes, précise celles qui sont des applications :

a°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b°) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

c°) $h: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

d°) $k: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x|$$

$$x \mapsto -\sqrt{x}$$

$$x \mapsto \sqrt{x-2}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

Exercice 6 : On donne f et g deux fonctions définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + 5$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$$

1°) Détermine les ensembles de définitions des fonctions f et g .

2°) f et g sont-elles égales ? si non, trouver le plus grand sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

Exercice 7 : Soit $f: [-5; -2] \rightarrow \left[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right]$

$$x \mapsto f(x) = \frac{-2x-3}{4}$$

1°) Montre que f est une application

2°) Montre que f est une injection

3°) Montre que f est bijective puis détermine f^{-1}

4°) Trace la courbe de f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire la courbe de f .

Exercice 8 : soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$

1°) Détermine l'ensemble de définition de h .

2°) Détermine les réels a et b tels que pour tout $x \in D_h$

$h(x) = a + \frac{b}{x-1}$, puis détermine l'image directe par h de chacun des ensembles

suivants : $A = [-1; 2]$, $B = [-1; 1]$ et $C = \left\{-2; -1; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$

Exercice 9 : soit la fonction $f: [3; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

1°) Détermine deux réels a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 - b$

2°) Utiliser ce résultat de la première question pour montrer que $x \in [0; +\infty[$. Que peut-on alors dire de f .

3°) Soit $y \in [0; +\infty[$

A°) quel est le nombre de solutions dans $[3; +\infty[$ de $f(x) = y$?

B°) f est-elle injective ? est-elle bijective ?

Exercice 10 : Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est injective surjective ou bijective .

a°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

$x \mapsto E(x)$ ou E Désigne la fonction partie entière

b°) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

c°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

d°) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - 3$$

$$x \mapsto 2x^2 + 1$$

$$(x; y) \mapsto x + y$$

e°) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

f°) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

g°) $f:]0; \pi] \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

$$(x; y) \mapsto (x - y; 3 + y)$$

$$x \mapsto \sin x$$

Exercice 11 : on considère les fonctions f et g définies par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{Max}(x; 1 - x)$$

$$x \mapsto \text{Min}(x; 1 - x)$$

On rappelle que : pour deux réels quelconques $(a; b)$ $\text{Max}(a; b)$ est le plus grand parmi a et b . $\text{Min}(a; b)$ est le plus petit parmi a et b

1°) Calcule $f(2); f(4); f(0); g(5); g(-3); g(3); g(0)$.

2°) Quels sont les ensembles de définitions de f et g ?

3°) Donne une expression de $f(x)$ et une de $g(x)$ sans les symboles Max et Min

4°) Pour quelles valeurs de x a-t-on $g(x) = f(x)$?

Exercice 12 : On donne

$$a°) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad x \mapsto (x + 1)^3$$

$$b°) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$

$$\text{et } x \mapsto x - 2$$

$$C^{\circ}) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$

$$x \mapsto x - 3$$

$$d^{\circ}) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$x \mapsto \frac{\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

Dans chacun des cas ci-dessus, montrer que les fonctions f et g sont égales (ou qu'elles coïncident)

Exercice 13 : soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

1°) Trouve Df ; Dg ; $Df \circ g$ et $Dg \circ f$.

2°) Donne les expressions de $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$

3°) Comparer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$

Exercice 14 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 5}{x^2 + 7}$$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tel que : $f(x) = \frac{a}{x^2 + 7} + b$

2) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$

3) Déterminer l'image directe par f des intervalles : $[4 ; 5]$; $[-3 ; -2]$

Exercices 15 : Démontrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x ; y) \mapsto (x - 2y ; x + 3y)$$

$$x \mapsto (2x ; 3x)$$

$$h: \mathbb{R} - \{0 ; 1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

Exercice 16 :

Soit l'application $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow I$

$$x \mapsto f(x) = \frac{4+x^2}{2}$$

1°) Détermine l'image directe par f des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \mathbb{R}_+ ; B = [2 ; 6] ; C = \{0 ; 2 ; 6\}$$

1°) Détermine l'image réciproque par f de :

$$J = [2 ; 10] ; K =]3 ; 4[; I = \{0 ; 4\}$$

1°) L'application f est-elle bijective ? si oui détermine sa bijection réciproque.

Exercice 17 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

1°) Trouve l'image directe par f de : $A = [1 ; 2]$, $B = [-3 ; -2]$ et $D = [-2 ; -3]$

2°) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - x - 2$

Déterminer $h^{-1}(\{0\})$ et $h^{-1}(\{-2\})$

Exercice 18 :

Donne une représentation sagittale de A vers B d'une application f :

a°) Surjective et non injective

b°) Injective et non surjective

c°) Bijective

Exercice 19 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow A$ où A est un sous ensemble de $x \mapsto \frac{2x-1}{x-1} \in \mathbb{R}$.

a°) Déterminer A pour que f soit une application bijective

b°) Trouver l'image directe par f de $B =]0 ; 2]$ / on mettra f sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$

Exercice 20 :

Soient g et h deux fonctions définies par $g(x) = 6 - x$ et $h(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{a + x^2}$ où a est un réel positif.

Déterminer le réel a pour que $g(0) = h(0)$

Exercice 21 :

Soit $f: [1; 16] \rightarrow [1; 10]$

$$x \mapsto \frac{3x+2}{5}$$

1°) Montrer que f est une application

2°) Montrer que f est une injection

3°) Prouver que f est une bijection puis expliciter sa bijection réciproque

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

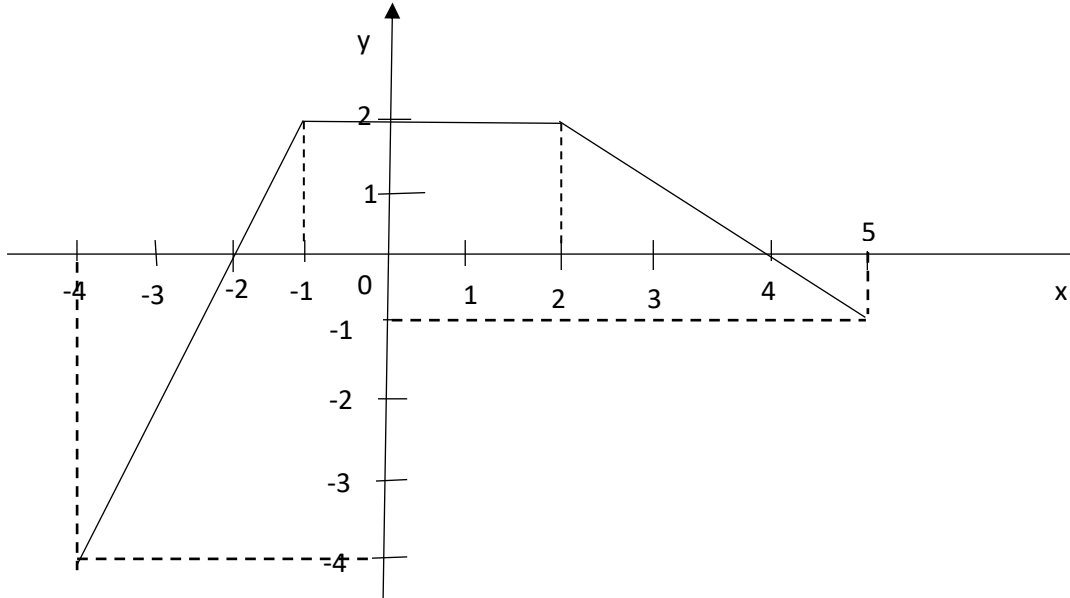
$$x \mapsto \frac{x-1}{|x|-1}$$

1°) Trouver la restriction de f à *chacune des ensembles* $\mathbb{R} + -\{1\}$ et $\mathbb{R}=\{1\}$

2°) soit g la restriction de f à $] -1 ; 0]$. Prouver que g est une injection.

Exercice 23 : le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit l'application f définie par sa représentation graphique :



1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Trouver l'image directe des intervalles suivants : $A=[-4 ; -1]$; $B=[-1 ; 2]$;

$C = [2 ; 4]$; $D = [4; 5]$

3°) Trouver l'image réciproque des intervalles suivants : $I = [-1; 2]$; $K = [2]$

4°) Définir explicitement f .

5°) Vérifier par calcul les résultats en 2°) et 3°)

Exercice 24 : Soit la fonction g définie par $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{|x-1|+|2-x|}{|x-3|}$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de g .

2°) Exprimer la fonction g sans le symbole de la valeur absolue.

3°) On désigne par h la restriction de g sur l'intervalle $[1 ; 2]$

a°) Donner l'expressions de $h(x)$.

b°) Déterminer $B=h(A)$

c°) Montrer que h réalise une bijection de A vers B .

d°) En déduire l'expression de $h^{-1}(x)$.

e°) Déterminer l'image réciproque de $j = \left[\frac{9}{2} ; -5 \right]$

Exercice 25 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2+5}{x^2+7}$$

1°) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x^2+7}$

2°) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

3°) Déterminer l'image directe par f des intervalles : $I = [4; 5]; J = [-3; -2]$.

Exercice 26 :

On donne les fonctions f et g définies par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x+2}{x-3} \quad \quad \quad x \longmapsto \sqrt{2x+3}$$

1°) a) Détermine l'ensemble de définition de f et de g .

b) Les fonctions f et g sont-elles des applications ? Justifie la réponse.

2°) a) Détermine l'ensemble de définition de $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$.

b) Calcule $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

c) La loi "o" est-elle commutative ? Justifier la réponse.

3°) On pose $A = \{-1 ; 0\}$ et $B = [5 ; 7]$.

a) Détermine deux nombres réels a et b tels que :

$$\text{pour tout } x \neq 3, \quad f(x) = a + \frac{b}{x-3}.$$

b) Détermine l'image directe de A par f et par g .

c) Détermine l'image réciproque de B par f et par g .

Exercice 27 :

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto |x+2| + |3-x|.$$

1°) Ecris f sans le symbole de la valeur absolue.

2°) a) Détermine l'image directe par f de $[-6 ; -4]$, $]-1 ; 2[$ et $[4 ; 8[$

b) L'image réciproque de $[5 ; +\infty[$.

3°) Soit g la restriction de f à $I = [3 ; +\infty[$.

a) Montre que g est bijective de I vers $f(I)$ que l'on déterminera.

b) Détermine la bijection réciproque g^{-1} de g .

Exercice 28:

1°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

a) Détermine $f([1 ; 2])$; $f(]-2 ; 3])$.

b) Détermine $f^{-1}([3 ; 5])$; $f^{-1}(]-2 ; 4])$.

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}.$$

2°) Soit g la fonction définie par:

a) Détermine le domaine de définition de g .

b) Détermine la fonction composée $f \circ g$.

En déduis que $f \circ g(x) = 2(x-1)^2 - 5$.

3°) Soit h la fonction définie par: $h(x) = f \circ g(x)$.

- a) Montre que la fonction h est la composée de deux autres fonctions u et v que l'on déterminera.
- b) Parmi ces fonctions laquelle est bijective ?