

Travaux Encadrés

CHAPITRE 1 : APPLICATIONS

Exercice 1 : _____

Déterminer le domaine de définition des applications suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x}$ b) $k(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

c) $h(x) = x^2 - x - 2$ d) $g(x) = \frac{4x-1}{x+1}$ e) $g(x) = \sqrt{\frac{4x-1}{x+1}}$

Exercice 2 : _____

Préciser si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ b) $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty[$

$x \mapsto x^2 + 1$ $x \mapsto x^2 - 1$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d) $k:]0, \pi] \rightarrow [0, 1]$

$x \mapsto 3x + 5$ $x \mapsto \sin x$

Exercice 3 : _____

1) On définit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

$x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$

f est elle injective, surjective, bijective ?

2) On considère l'application $g: [-1, 1] \rightarrow A$

$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

Déterminer l'ensemble A pour que g soit une surjection.

Exercice 4 : _____

On définit l'application f de $\mathbb{R} - \{2\}$ vers $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

a) Prouver que f est une bijection

b) Déterminer sa bijection réciproque.

c) Tracer la courbe (C) de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire celle de sa bijection réciproque (C').

Exercice 5 : _____

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{4+x^2}{2}$

a) Déterminer l'image directe par f des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $A = \mathbb{R}^+$, $B = [2; 6]$, $C = \{0, 2, 6\}$

b) Déterminer l'image réciproque par f des sous-ensemble suivant : $D = [2; 10]$, $E =]3, 4]$ et $F = \{0\}$

Exercice 6 : _____

On considère les applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = |2x - 1| + |1 - x|$ et $g(x) = 3x - 2$

a) Écrire f sans le symbole de la valeur absolue

b) Prouver que g est une restriction de f sur un intervalle I à préciser.

Exercice 7 : _____

1) Soit l'application f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Trouver $f(A)$ et $f(B)$ ou $A =]-1, 4]$ et $B = [-5, 3]$

2) On donne les applications f et g telles que

$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^2 - x - 2$

Trouver $f^{-1}(A)$ et $g^{-1}(B)$ avec $A = [1; 3]$ et $B = \{0\}$

Exercice 8 : _____

On donne trois application définie par :

$f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = 3x - 5$ et $h(x) = x^2$

a) Calculer $gof(x)$, $goh(x)$ et $foh(x)$

b) En déduire $gof(2)$

c) Ces applications sont elles bijectives ?

Exercice 9 : _____

On considère les applications $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

et $g(x) = x^2 - x - 2$

a) Trouver $f([1; 3])$ et $f([-2; 3])$

b) Trouver $g^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\{-2\})$

Exercice 10 : _____

Sur quel ensemble l'application

$f(x) = |2 - x| + |3 - x| + 2x$ est elle égale à

l'application affine de source $\mathbb{R}$ définie par

$g(x) = 1 + 2x$.

Travaux Encadrés

CHAPITRE 2 : FONCTIONS POLYNÔMES

Exercice 11

Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ b) $g(x) = x^2 + x + 1$

Exercice 12

Parmi les 5 affirmations suivantes, dites si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

- a) Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.
- b) Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.
- c) La fonction polynôme P définie par $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$, n'a pas de racines positives.
- d) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes zéros sont égales.
- e) Si α est un zéro de deux fonctions polynômes R et S , alors $R(x) - S(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

Exercice 13

Factoriser si possible les polynômes suivants :

a) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ c) $g(x) = x^2 + x + 1$
 d) $h(x) = x^2 - 4x + 4$ b) $k(x) = x^3 - 8$
 e) $p(x) = x^5 - 1$ f) $q(x) = x^6 + 1$

Exercice 14

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 4$

- a) Vérifier que $P(2) = 0$
- b) Déterminer les réels a, b et c tels

$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ par trois méthodes différentes.

- c) Donner une factorisation complète de P .
- d) Trouver le signe des réels suivants : $f(-3)$, $f(0)$ et $f(5)$.

Exercice 15

On considère la fonction polynôme P définie par

$$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$$

- a) Quel est le degré de P ?
- b) Montrer que $x = -1$ est une racine de P .
- c) Déterminer une fonction polynôme Q du troisième degré telle que $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$.
- d) Déterminer les racines de Q .

Exercice 16

On considère la fonction P définie par

$$P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$$

- 1) Montrer que P est un polynôme dont on précisera le degré.
- 2) Trouver une forme factorisée de P .

Exercice 17

- 1) Trouver un polynôme P de degré 3, divisible par $x - 1$ et tel que les restes des divisions euclidiennes de P par $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$ soient égaux.

- 2) Déterminer les polynômes de degré 3 qui admettent les réels 1, 2 et 3 pour zéros.

- 3) Trouver un polynôme g du second degré tel que :

$$g(0) = 3 ; g(-2) = 1 ; g(1) = 10.$$

Exercice 18

On considère le polynôme f tel que :

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$$

- a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$
- b) Trouver une factorisation de f
- c) Quels sont les zéros de f ?

Exercice 19

Prouver que le polynôme f défini par

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$$

est le carré d'un polynôme g que l'on précisera.

Exercice 20

On définit les polynômes f et g tels que :

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont réels}$$

$$\text{et } g(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Trouver a et b pour que f soit divisible par g .

Exercice 21

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 14x + 8$

On suppose que f admet trois zéros α, β et γ .

- a) Calculer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ puis $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ sans calculer α, β et γ .
- b) Calculer $f(-4)$ et déterminer alors les trois zéros de f .
- c) Vérifier les résultats précédents.

Exercice 22

Former un polynôme P de degré 3 tel que pour tout

$$\text{réel } x, P(x) - P(x - 1) = x^2$$

En déduire une expression de la somme $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Travaux Encadrés

CHAPITRE 3 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées suivantes :

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ b) $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$

Exercice 25

Résoudre les équations suivantes :

a) $(x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$

b) $\left(\frac{3-4x}{5}\right)^2 - 2(3-4x) + 25 = 0$

c) $7 + x = (2x - 1)(3x - 2)$

Exercice 26

Pour tous x et y

a) Développer $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

b) Déterminer x et y sachant que leur différence est 65 et la différence de leurs cubes est 647855.

Exercice 27

Trouver deux réels ayant pour somme S et pour produit P dans les cas suivants :

a) $S = 4$ et $P = 3$

b) $S = 2\sqrt{3}$ et $P = -1$

Exercice 28

a) Déterminer les dimensions a et b d'un champ rectangulaire dont le périmètre est 64 m et l'aire est 240 m^2 .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 51 \end{cases}$

c) Soient deux réels a et b de somme $S = -1$ et de produit $P = 12$. Sans les calculer trouver : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $a^2 + b^2$ et $a^3 + b^3$

Exercice 29

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-5x^2 + 3x - 2 > 0$ b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \leq 0$

c) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ d) $-x^2 - x - 1 < 0$ e) $9x^4 - 12x^2 + 4 \geq 0$

Exercice 30

Résoudre les équations irrationnelles et inéquations

irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{3x+1} = 4 - x$ b) $\sqrt{3x^2 - 2x + 1} = x$

c) $3 - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2}$ d) $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2 + 1} = x + 1$

e) $\sqrt{x-3} + 1 > 0$ f) $\sqrt{x^2 + 11} < 2x - 4$

g) $x - 5 \leq \sqrt{x-2}$ h) $\sqrt{-x^2 + 7x} \geq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Exercice 31

On considère l'équation $(E_m): x^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0$

1) Trouver le réel m pour que 1 soit une racine de (E_m)

2) En déduire l'autre solution

3) Déterminer m pour que l'équation (E_m) admet deux solutions distinctes.

4) Déterminer m pour que (E_m) n'admet pas de solution

5) Déterminer m pour que (E_m) admet une solution double

6) Déterminer m pour que (E_m) admet deux solutions de signe contraire.

Exercice 32

Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations suivantes :

a) $(m-3)x^2 + (7-4m)x + 20 = 0$

b) $mx^2 - 2(m-2)x - 10 = 0$

Exercice 33

Résoudre les inéquations suivantes en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m

a) $3x^2 - 2(5m-2)x + 3 < 0$

b) $(m-4)x^2 - (m+3)x + m - 4 \geq 0$

Exercice 34

1) Soit l'équation paramétrique $x^2 - (2m+1)x + 8 = 0$ telle que ses racines x_1 et x_2 vérifient $x_1^2 + x_2^2 = 20$

Trouver le paramètre m

2) Former l'équation du second degré dont les racines x_1 et x_2

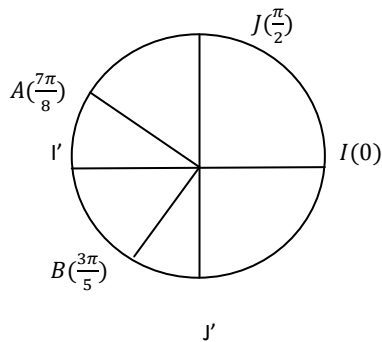
vérifient le système : $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 3m - 5 \\ x_1x_2 - x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

Travaux Encadrés

CHAPITRE 4 : TRIGONOMETRIE

Exercice 35

Sur un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, on considère les points A et B tels que : $(\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{7\pi}{8}$ et $(\vec{OI}, \vec{OB}) = \frac{-3\pi}{5}$



Déterminer la mesure principale des angles suivants :

a) $(\vec{OA}, \vec{OJ})$

b) $(\vec{OJ}, \vec{OB})$

c) $(\vec{OB}, \vec{OA})$ [on pourra utiliser la relation de Chasles]

Exercice 36

Déterminer les mesures principales des angles orientés suivants de mesure donnée et placer les sur le cercle trigonométrique :

a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{83\pi}{4}$ c) $\frac{8\pi}{3}$ d) $\frac{-27\pi}{4}$ e) 1020°

Exercice 37

Simplifier au maximum les expressions suivantes : $A(x) =$

$$\cos(x + \pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x) B(x) = \tan(x + \pi) -$$

$$\tan x \text{ (pour } x \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cotan(-x)$$

$$E = \sin(x - y) \cos(x + y) - \sin(x + y) \cos(x - y)$$

$$F = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

Exercice 38

Démontrer les relations suivantes :

Pour tout x .

a) $4 \cos^4 x + 4 \sin^4 x = 3 + \cos 4x$

b) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

Pour tout réel x différent de $\frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

d) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

e) $\tan x = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ et en déduire les valeurs exactes de

$\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 39

a) En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur

exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$

(on pourra utiliser l'égalité $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$)

b) Démontrer que pour tout réel x ,

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$$

Exercice 40

Démontrer que pour tous nombres réels a et b on a :

a) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

b) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

c) Vérifier pour tous réels a et b les égalités suivantes :

d) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$

e) $\sin^2(a + b) + \cos^2(a - b) = 1 + \sin 2a \sin 2b$

f) $\cos a + \sin a = \sqrt{2} \left(\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \right)$

Exercice 41

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante :

$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. On rappelle que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

Pour tout $x \in D$, où $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$

1) Démontrer que pour tout $x \in D$, $\tan(\pi + x) = \tan x$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{9\pi}{8}$

2) Démontrer que pour $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ puis de $\sin \frac{\pi}{8}$

Exercice 42

1) Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :

a) $A = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$

b) $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

2) Calculer $A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

$$B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

En déduire que $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

Exercice 43

Trouver l'angle θ donné en radian dans les cas suivants :

a) $\begin{cases} \cos \theta = -1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercice 44

Calculer $\cos x$ et $\sin x$ dans les cas suivants : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Calculer $\sin 2x$ et $\cos 2x$ si $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 45

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ b) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ c) $\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 46

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ b) $2 \cos x + 1 = 0$ c) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ e) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$

f) $2 \sin^2 x - 1 = 0$ g) $\cos 2x + \cos x = 0$

h) $-2 \cos^2 x + \cos x + 6 = 0$

i) $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ j) $\sin 2x - 2 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ k) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0$

l) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ m) $3 \tan^2 x - 1 = 0$ $D = [-\pi, \pi]$

n) $2 \cos^3 x - 7 \cos^2 x + 2 \cos x + 3 = 0$ $x \in]-\pi, \pi[$

o) $x \in \mathbb{R}, \cos(5x) - \cos x = \sin 3x$

p) $2 \cos 2x \sin x = \sqrt{3} \sin x$

q) $\cos x + \sin x = -1$ r) $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Exercice 47

a) Résoudre dans $[0; 2\pi] \times [0; \pi]$ le système :

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

b) Résoudre dans $[0, \pi]^2$, $\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercice 48

Vérifier que l'on peut écrire

$$\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1$$

Résoudre : $1 - \frac{1}{2} \sin(2x) + \cos x + \cos x = 0$ et

$$1 + \frac{1}{2} \sin(2x) + \cos x + \cos x = 0$$

Exercice 49

a) Factoriser $f(x) = \sin(3x) + \sin x$

b) Résoudre pour $x \in [-\pi, \pi]$ l'équation

$\sin(3x) + 2 \cos^2 x + \sin x = 0$ et placer les points images solutions sur le cercle de trigonométrie.

Exercice 50

Résoudre dans D les inéquations suivantes puis représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrie

a) $\cos x < \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $D = \mathbb{R}$ b) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ $D = \mathbb{R}$ c) $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$ $D = [0, 2\pi]$ d) $\frac{1 - 2 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} \geq 0$; $D =]-\pi, \pi]$ e) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ $D = \mathbb{R}$ f) $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \geq 0$; $D = [0, 2\pi]$ g) $\cos x (2 \sin x - 1) \leq 0$; $D =]-\pi, \pi]$ h) $\sin x - \cos x \leq 0$; $D = \mathbb{R}$ i) $x \in [0, 2\pi], \cos(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ j) $x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{x}{3}\right) > \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 51

Résoudre sur D les systèmes d'inéquations suivantes :

a) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq \frac{-1}{2} \end{cases} D = \mathbb{R}$ b) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq \frac{-1}{2} \end{cases} D = \mathbb{R}$

Travaux Encadrés

CHAPITRE 5 : SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 52

1) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel on a : $2^n \geq n + 1$

2) On définit la suite suivante par récurrence

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n} \end{cases}$$

Prouver par récurrence que $0 \leq U_n \leq 3$

3) Démontrer par récurrence que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*, (1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

Exercice 53

On définit la suite (U_n) par $U_n = 3n - 2$

a) Prouver que la suite (U_n) est arithmétique de raison r que l'on précisera

b) Représenter graphiquement la suite (U_n) (on pourra se limiter aux six premiers termes).

Exercice 54

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = 5 - 2n$

1) Calculer U_0, U_1 et U_2

2) Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

3) Que vaut U_{100} ? Calculer la somme des 101 premiers termes.

Exercice 55

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $q = -2$

a) Calculer U_2, U_3 et U_4

b) Calculer U_{20}

c) Calculer la somme $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{20}$

Exercice 56

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1 et U_2

2) La suite (U_n) est-elle arithmétique, géométrique ?

3) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$

4) On considère la suite $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

a) Calculer V_0, V_1 et V_2 puis démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Exprimer U_n en fonction de n

c) Exprimer U_n en fonction de V_n

d) Que vaut U_{10} ?

Exercice 57

La suite (U_n) est arithmétique de raison r , on sait que

$$U_{50} = 406 \text{ et } U_{100} = 806$$

a) Calculer la raison r et U_0

b) Calculer la somme $S = U_{50} + U_{51} + \dots + U_{100}$

Exercice 58

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 1999 + 2000$$

$$S_2 = 2001 + 2002 + 2003 + \dots + 9998 + 9999$$

Exercice 59

1) Soit U_1, S_n, r et S désignant respectivement le 1^{er} terme, le $n^{\text{ème}}$ termes, la raison et la somme des n termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer :

a) U_n et S_n si $U_1 = 7, n = 120$ et $r = 5$

b) r et S_n si $U_1 = 397, U_n = 64$ et $n = 1000$

c) n et r si $U_1 = -3, U_n = 6$ et $S_n = \frac{57}{2}$

2) Soit U_1, S_n, q et S désignant respectivement le 1^{er} terme, le $n^{\text{ème}}$ termes, la raison et la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique. Calculer :

a) U_n et S_n si $U_1 = 2, n = 5$ et $q = 3$

b) U_1 et U_n si $q = \frac{1}{2}, n = 7$ et $S_n = \frac{1143}{2}$

c) n et q si $U_1 = 48, U_n = 243$ et $S_n = 63$

Exercice 60

1) Soit u une suite arithmétique telle que $u_6 = 7, u_{10} = 4$

Calculer u_{20}

2) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que :

$$\begin{cases} u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 236 \\ u_4 + u_6 = 6 \end{cases}$$

Calculer u_0 et la raison r

Exercice 61

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $v_1 = 6, v_4 = 48$

a) Calculer v_{15}

b) Calculer u_1, u_2 et u_3 sachant que

$$u_1 u_3 = \frac{4}{9} \text{ et } u_1 + u_2 + u_3 = \frac{19}{9}$$

c) Calculer la valeur exacte de $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{38}}$

Exercice 62

On dispose d'un capital de 1900000 Fcfa en 2012. On place ce capital sur un compte à intérêts composés de 3% par an.

1) Calculer le capital obtenu au bout d'un an.

2) Calculer le capital obtenu au bout de 7 ans.

3) De quel pourcentage a augmenté le capital ces 7 années ?

4) Combien d'années faut-il laisser cet argent sur le compte afin d'avoir un capital de 4000000 Fcfa ?

Exercice 63

Le Lycée TATA décide de verser à ses professeurs une prime annuelle de 5000 F CFA. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 20% par rapport à l'année précédente. On note (U_n) la suite des primes avec $U_1 = 5000$

1) Calculer U_2 puis U_3 (c'est-à-dire la prime versée par le Lycée la 2^{ème} année et la 3^{ème} année).

2) Exprimer U_{n+1} en fonctions de U_n

En déduire la nature de la suite (U_n)

Un professeur de Mathématiques compte rester 20 ans dans le Lycée à partir du moment où est versée

3) Calculer la prime qu'il touchera la 20^{ème} année (c'est-à-dire U_{20})

4) Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 ans

(c'est-à-dire $S = U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$)

Exercice 64

A) On donne la suite (U_n) définie par récurrence par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \text{ et } U_2 = 2 \\ U_{n+2} = 6U_{n+1} - 5U_n \end{cases}$$

1) Calculer U_2, U_3 et U_4

2) Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$

3) Déterminer deux réels A et B tels que $U_n = 5^n A + B$

4) En déduire U_{10}

B) On considère la suite (U_n) telle que

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calculer U_{10}

Exercice 65

1) x, y et z sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 9 et la somme des carrés est 59.

2) x, y, z sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$.

Exercice 66

Soient a, b, c, d et e 5 termes consécutifs d'une suite

arithmétique telles que $\begin{cases} a + b + d + e = 60 \\ d + e = 42 \end{cases}$

1) Exprimer a, b, d et e en fonction de c et r .

2) Déterminer a, b, c, d et e .

Exercice 67

Étudier l'éventuelle limite de chacune des suites suivantes

$$a) u_n = \frac{10}{n^3} \quad b) u_n = \frac{n^2}{n+1} \quad c) u_n = \frac{n+1}{n+3} \quad d) u_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad e) u_n = \frac{\sqrt{n^2+5}}{n}$$

Exercice 68

a) Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r . Démontrer que pour tout entier

naturel n , on a : $U_n = U_0 + nr$ b) Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison q .

Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $V_n = V_0 q^n$ c) Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme α , de dernier terme β et de raison r .

Prouver que la somme des n premiers termes consécutifs est $S = n \frac{\alpha + \beta}{2}$ d) Soit S la

somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme α et de raison $q \neq 1$. Montrer que S vaut $\alpha \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 69

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle

$$a) u_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \quad b) u_n = n + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

$$c) u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad d) u_n = \frac{2n+5}{n+1} \quad e) v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$f) u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5} \quad g) u_n = 2n + \sin nh \quad h) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Exercice 70

$$a) \text{ Déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

$$b) \text{ Étudier la convergence des suites } u_n = \frac{4n+1}{2n+5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = \frac{n^2+1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$