

EXERCICE 1 :

Détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes : a) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; b)

$f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+3}}$; c) $f(x) = \frac{x\sqrt{x-3}}{x^2+1}$; d) $f(x) = \frac{1}{x^2-x+2}$; e) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$; f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^2-x+2}$; g) $f(x) = \frac{3}{2-|x|}$; h) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x+5}{x-3}$; i) $f(x) = \sqrt{|x|}$; j) $f(x) = \frac{x^2+3}{|x+2|-5}$

k) $f(x) = \sqrt{3-|x-6|}$; l) $f(x) = \frac{x+2+\sqrt{1-|x+1|}}{\sqrt{\frac{1}{2}-|x|}}$; m) $f(x) = \sqrt{-5x}$; n) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-3|-|2x+\frac{3}{2}|}$

o) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2x^2+3}$; q) $f(x) = \frac{x^2-x+5}{|2x-1|-3}$; r) $f(x) = \sqrt{-x(x^2-3x+2)}$; s)

$f(x) = \sqrt{-x}$; t) $f(x) = \sqrt{1-x}$; u) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$; v) $f(x) = \frac{2x-3}{6x^2-13x-5}$; w)

$f(x) = \frac{2x-3}{6x^2-13x-5}$; x) $f(x) = \frac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$; y) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$; z) $f(x) = \sqrt{-2x^2+2x+13}$;

z) $f(x) = \sqrt{-5x}$; w) $f(x) = \frac{2}{x+\sqrt{2x^2+5x-3}-3}$; a') $f(x) = \frac{1+x}{xE(2x)}$; b') $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$

EXERCICE 2 :

1. Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des applications :

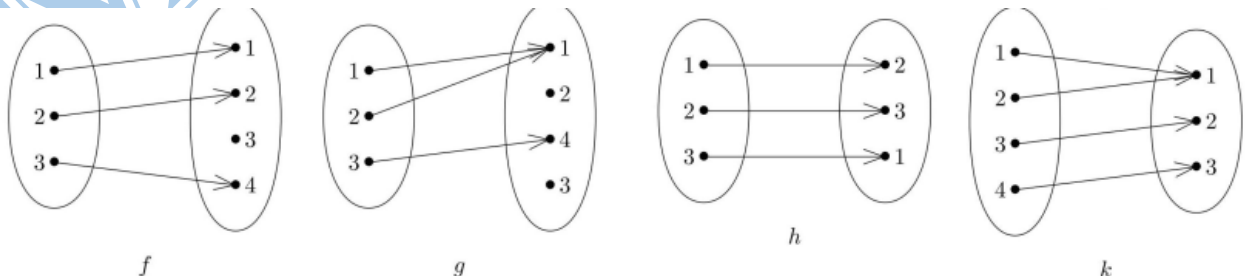
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $h: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; $i: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; $k:]-\infty; 0[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto |x|$; $x \mapsto x - \sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt{x-2}$; $x \mapsto \frac{1}{x-1}$; $x \mapsto \frac{x-1}{x-3}$

$l: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; $m: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$; $n: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$; $o:]2; 4] \rightarrow \mathbb{R}^-$; $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{1+x^2}$; $x \mapsto \frac{-x-2}{x+2}$; $x \mapsto \frac{x+5}{|E(x+2)|-4}$; $x \mapsto \frac{x-2}{x-4}$; $x \mapsto \frac{x}{x-1}$

2. On considère les quatre applications dont les diagrammes sagittaux sont donnés ci-dessous :



Dire dans chacun des cas si l'application est injective, surjective ou bijective. Justifier.

EXERCICE 3 :

1. Soient les fonctions f et g définies par : $g(x) = \frac{x}{x+2}$ et $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$. On pose $h(x) = (g \circ f)(x)$.

- Déterminer D_h
 - Déterminer $h(x)$
 - Soit la fonction k définie par : $k(x) = \frac{x+3}{3x+5}$. Les fonctions h et k sont-elles égales ?
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les fonctions f et g sont égales :
- $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ et $g(x) = x+1$
 - $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$
3. On considère les applications f et g définies par
- $f:]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ et $f:]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin x}{1+\cos x}$ et $x \mapsto \frac{1-\cos x}{\sin x}$. Montrer que $f = g$
 - $f:]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g:]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ et $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$. Montrer que $f = g$

EXERCICE 4 : Soient les fonctions $f; g$ et h définies respectivement par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g: [0; 1] &\rightarrow [0; 1] & h: \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x &\mapsto 3x - 4 & x &\mapsto x^2 - 2x + 1 & x &\mapsto \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

- Déterminer $f([0; 1])$; $f([-1; 2])$
- g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- Déterminer $h([-2; -1])$; $h^{-1}([2; 3])$

EXERCICE 5 : On considère l'application f de $]-\infty; 1]$ vers $[-4; +\infty[$ définie par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3. \text{ Justifie que } f \text{ est une bijection et explicite sa bijection réciproque}$$

EXERCICE 6 : Soit l'application bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$. Représenter dans le même repère la courbe représentative de la fonction f et celle de sa bijection réciproque f^{-1}

EXERCICE 7 : (Extrait du sujet de composition du 1^{er} tr 2016-2017 Lycée Madina)

f et g sont des fonctions définies par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$

$$x \mapsto 1 - 2x \qquad x \mapsto \frac{3+4x}{x-2}$$

- Démontrer f et g sont des applications bijectives.
- Déterminer les bijections f^{-1} et g^{-1} .

EXERCICE 8 : (Problème de sujet de compo du 1^e tr 2015-2016 de Lycée MGR Montclos SKO)

Partie A : On donne les fonctions :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R}^* & g: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}^* & h: \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto x - 1 & x &\mapsto \frac{1}{x} & x &\mapsto \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

1. Vérifier que f, g et h des applications.
2. Montrer que f, g et h sont bijectives
3. Calculer en fonction de $x, g \circ f$ et vérifier que $g \circ f = h$

Partie B : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$

$$x \mapsto |2x + 1| - |x - 3|$$

1. Ecrire $f(x)$ sans les symboles de la valeur absolue.
2. Déterminer la restriction de f à chacun des ensembles $]-\infty; -\frac{1}{2}]; [-\frac{1}{2}; 3]; [3; +\infty[$
3. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -2x + 8$$
 1. Déterminer l'image directe de $[-2; -1]$
 2. Déterminer l'image réciproque de $[5; 10]$.

EXERCICE 9 :

- 1) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$. La fonction f ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 2) Soit l'application f définie comme suit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$
 f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 3) Soit $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$x \mapsto (x - y, 3 + y)$$
 h est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 4) Montrer $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto (x + y, y - 2)$$
 est une bijection et déterminer f^{-1} .
- 5) Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto (x - 2y, x + 3y)$$
 - a. Montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1} .
 - b. Déterminer $f \circ f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

EXERCICE 10 : (Extrait du sujet d'un devoir 2022-2023 du Lycée Kankou Moussa de D)

Soit l'application $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soit l'application $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$
 Trouve le sous ensemble B de $\mathbb{R}$ de pour que f soit bijective et détermine sa bijection réciproque.
3. a. Quelle est l'image par f de $[0; 5]$ et $]-1; 1[$?
 b. Quelle est l'image réciproque par f de $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$
4. Soit l'application $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x+1}$$
 Détermine les domaines de définitions D_g ; $D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$.

EXERCICE 11 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Soit à présent $g: [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$. Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de sa fonction inverse.

EXERCICE 12: Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = |2x + 2| + |4x - 12| + 5$ et $g(x) = 6x - 5$

1. Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. Trouve une partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.
3. Détermine la fonction h qui est la restriction de f sur $[-1; 3]$.

EXERCICE 13 : (Extrait de sujet de composition du 2^e tr 2022-2023 de L Kankou Moussa D)

Soit l'application $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$$x \mapsto \frac{-3x}{2x+1}$$

1. Montre que f est bijective.
2. Explicite la bijection réciproque f^{-1} de f
3. a. Détermine les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f(x) = a + \frac{b}{2x+1}$
b. En déduire $f([0; 5])$ et $f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$.

EXERCICE 14 : (Extrait de sujet de composition du 2^e tr 2022-2023 L. Kankou Moussa D)

I/ On considère les fonctions : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-2}{2x^2-3x} \quad x \mapsto \sqrt{\frac{2x+2}{x^2-4}} \quad x \mapsto x+1$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, g et h .
2. a. Déterminer le domaine de $f \circ h$
b. Calcule $f \circ h(x)$

II/ On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{|x^2-9|}{|x|-1}$

1. Détermine le domaine de définition de f .
2. Ecris f sans le symbole de la valeur absolue.
3. Détermine la restriction de f à $]-\infty; -3]$.

EXERCICE 15 :

I/ f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$. f et g sont égales ?

II/ Soient $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{x^2-9}$

- a. Déterminer : D_f et D_g
- b. Déterminer : $D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$
- c. Calculer : $f \circ g$ et $g \circ f$

EXERCICE 16 : (Problème du sujet de devoir 2022-2023 de Lycée BAC)

- 1) Soient les fonctions t et p définies par : $t: A \rightarrow B$ $p: [0; 2[\rightarrow [-3; 1[$
$$x \mapsto \frac{2x-1}{x+2} \quad x \mapsto x^2 - 4x + 1$$
- a) Détermine l'ensemble A pour que t soit une application.
b) Détermine l'ensemble B pour que t soit une application surjective.
c) Pour $A = \mathbb{R} - \{-2\}$ et $B = \mathbb{R} - \{2\}$ prouve que t est une application bijective
- 2) a) Détermine les réels a et b tels que $p(x) = (x + a)^2 + b$
b) Supposons que $a = -2$ et $b = -3$.
-Montre alors que p est une application bijective
-Explicite sa bijection réciproque p^{-1}
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$ soient (C_p) et $(C_{p^{-1}})$ les courbes respectives de p et p^{-1} .
- a) Complète le tableau suivant.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p^{-1}(x)$							

- b) En utilisant le tableau ci-dessus, trace dans le repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$ la courbe $(C_{p^{-1}})$ de la fonction p^{-1} .
c) En déduire la courbe (C_p) de la fonction p dans le même repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

EXERCICE 17 : (Extrait de sujet de composition du 1^{er} tr 2017-2018 Lycée les CASTORS)

1. On donne l'application g définie par $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{2x+3}{-x+5}$$
- a. Montrer que g est bijective
b. Trouver g^{-1} .
2. On donne l'application k définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{x^2 - 4x + 15}{x^2 - 4x + 4}$
- a. Trouver D_k .
b. Trouver l'image directe de $E = [-5; 7]$ par k .

EXERCICE 8 : Soient f et g définies de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et g .
2. On considère la fonction $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = f \circ g(x)$.
a. Déterminer le domaine de définition de h . h est-elle une application ?
b. Expliciter h .
c. h est-elle injective ? surjective ? peut-on dire que h est bijective ?
3. Soit $p: \left] \frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \sqrt{2x-1}.$$
- a. Montrer que p est une bijection.
b. Expliciter sa bijection réciproque.

EXERCICE 19 : Soient les applications $f:]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$ et $g:]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$

$$x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^2$$

- 1) Déterminer $f([2; 4])$ et $g^{-1}(\{9\})$
- 2) Montrer que f est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque.
- 3) a) Vérifier que : $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) = (f(x))^2$
b) En déduire que g est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE 20 :

- 1) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$
 - a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} |f(x)| < 1$
 - b) f est-elle surjective ?
 - c) Montrer que f est injective.
- 2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x^2 - x$. Soit
 $k: \left[\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \left[-\frac{1}{4}; +\infty[\right.$
 $x \mapsto g(x)$ Montrer que k est bijective et déterminer $k^{-1}(x)$

EXERCICE 21 : (Extrait de sujet de devoir Lycée Sergent Malamine Camara-Sénégal)

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x|x|$.

1. Soit m un réel.
 - a. Résoudre en discutant suivant le signe des valeurs de m l'équation $x|x| = m$.
 - b. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer l'application réciproque f^{-1} .
2. Construire, relativement à un repère orthonormé, les courbes représentatives (C) et (C_{-1}) respectives de f et f^{-1} .

EXERCICE 22 :

On considère l'application : $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - \sqrt{x}$$

- 1) Montrer que l'application f n'est pas injective.
- 2) a- Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation : $f(x) = -1$.
b- L'application f est-elle surjective ? Justifier.
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; +\infty[\right.$
 - a. Montrer que l'application g est bijective de $\left[\frac{1}{4}; +\infty[\right.$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}; +\infty[\right.$.
 - b. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty[\right.$.

Problème 1 : (Problème d'un sujet de devoir)

A- Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x - 2$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

- 1) Déterminer la forme canonique de f et écris g sous forme $g(x) = a + \frac{b}{x-2}$ où a et b sont des réels à déterminer.
- 2) Trouver l'image directe par g de : $A = [-1 ; 4]$; $B =]-2 ; 0]$; $C =]3 ; +\infty[$
- 3) Déterminer $f^{-1}(x) = \left(\left\{ 4 ; -2 ; \frac{\pi}{2} \right\} \right)$ et $g^{-1}(x) = ([-3 ; 1])$
- 4) Trouver $f([-2 ; 3])$; $g([4 ; 5])$

B- On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |2x + 1| - 2 \left| x - \frac{3}{2} \right|$

- 1) a) Trouver l'expression de f sans le symbole de la valeur absolue suivant les valeurs x
b) Déterminer la restriction g de f à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right]$
- 2) Déterminer l'ensemble $B = f \left(\left[-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right] \right)$
- 3) Soit l'application $g : \left[-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right] \rightarrow B$
$$x \mapsto g(x)$$

Montrer que g est bijective puis expliciter g^{-1}

Problème 2 : (Extrait de sujet de Compo 2022-2023 Inspection d'Académie de Kaolack-Sénégal)

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + 2x^2 - 3x - 2.$$

Partie A : Soient u l'application définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - \frac{3}{x}$ et l'application v définie de $] -\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $v(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

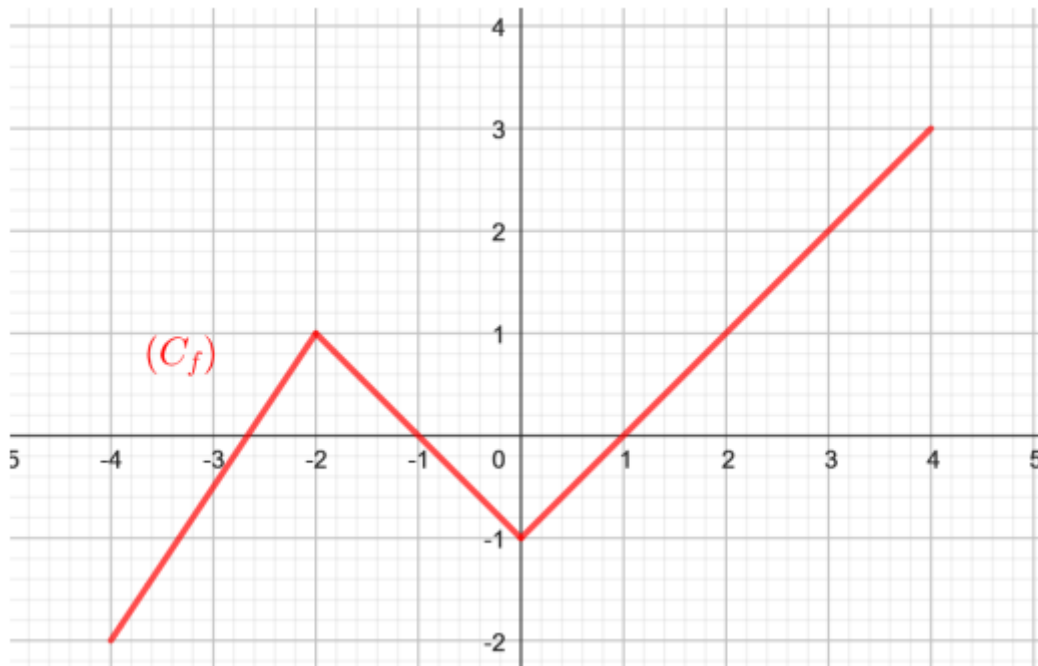
- 1) Montrer que si $f(-x) = g(-x)$ alors $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 - a) $f \circ u(x) = g \circ u(x)$.
 - b) $f \circ u(x) \geq g \circ u(x) + 2x^2 - 8$.

Partie B : Dans cette partie, on donne $g(x) = -x^2 f(x) + 4$.

- 1) Montrer que $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$.
- 2) a) Montrer que : $\forall x \neq 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
b) f est-elle injective ? Justifier.
- 3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -1$.
b) f est-elle surjective ? Justifier
- 4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - a) Montrer que h est bijective de $[1 ; +\infty[$ vers de $\left[\frac{1}{2} ; 2 \right[$
 - b) Définir alors sa bijection réciproque h^{-1} .

Problème 3 : (Problème de compo du 1^{er} Sm 2023-2024 Ins d'Académie de Thies-Sénégal)

Partie A : On considère l'application $f: [-4 ; 4] \rightarrow [-2 ; 4]$ définie par la représentation graphique ci-dessous



- 1) f est-elle une application injective ? surjective ? bijective ? Justifier vos réponses.
- 2) Quelles sont les images respectives des nombres -4 et 0 ?
- 3) Quelle est l'image directe de l'intervalle $[-4 ; 0]$?
- 4) Donner l'image réciproque de l'intervalle $[-2 ; 1]$.

Partie B :

Soient $f:]1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

et

$g:]2 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}$$

- 1) f et g sont-elles des applications ? Justifier les réponses.
- 2) Soit l'application $h:]1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

- a) Montrer que h est bijective.
- b) Montrer que h est surjective.
- c) En déduire que h est bijective puis donne l'expression de la bijection réciproque h^{-1} .