

Travaux dirigés sur les applications

Exercice1 :

I°) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes.

1°) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$	12°) $f: x \mapsto \frac{x^2}{ x+3 +4}$	25°) $f: x \mapsto \sqrt{ 5x+10 - 6x-1 }$
2°) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{12}x + \frac{10}{15}$	13°) $f: x \mapsto \frac{x-5}{ x^2-3 -1}$	24°) $f: x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{ \sqrt{3}x-3 }}$
3°) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$	14°) $f: x \mapsto \frac{\sqrt{7}x}{ x-2 - 2x }$	25°) $f: x \mapsto \frac{\sqrt{ x -1}}{ x -3}$
4°) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	15°) $f: x \mapsto \frac{(x-5)^2}{ x^2+4x+4 + x+2 }$	26°) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+2} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+3} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$
5°) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$	16°) $f: x \mapsto \left \frac{x-1}{x^2-x} \right $	27°) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2}; x > \frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{x-1}}; x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$
6°) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x(x-1)} + \frac{4-x}{x^2-9}$	17°) $f: x \mapsto \frac{x+6}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}$	28°) $f: x \mapsto \begin{cases} x-1 + \frac{2-5x}{\sqrt{4+x}} & \text{si } x \leq 0 \\ x - \sqrt{x^2+x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
7°) $f(x) = \sqrt{-x+4}$	18°) $f: x \mapsto \sqrt{ 2x^2+6x-1 }$	29°) $f: x \mapsto \frac{6x}{E(x)}$
8°) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$	19°) $f: x \mapsto \sqrt{ 2x+4 -5}$	30°) $f: x \mapsto \frac{E(x)}{2E(x)-4}$
9°) $g(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$	20°) $f: x \mapsto \sqrt{3- 2x-6 }$	31°) $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{1+E(x)}$
10°) $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$	21°) $f: x \mapsto \sqrt{ 2-7x + 3+5x }$	32°) $f: x \mapsto \frac{7x-3}{\sqrt{x-E(x)}}$
11°) $h(x) = \frac{x^2-x+3}{\sqrt{2x+5-7}}$	22°) $p(x) = \frac{x+2}{ x +1} + \frac{2}{ 2x-1 - x-4 }$	33°) $p(x) = \frac{x^2-1}{ x -1} + \sqrt{1- -x+4 }$

Exercice2 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1°) $f: [-4;5] \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \frac{2x+1}{x+3}$	4°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \sqrt{ x^2-4 }$
2°) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \sqrt{x^2-4x}$	5°) $f: [-4;+\infty[\rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \sqrt{ x-3 -4}$
3°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$	6°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \sqrt{ x +4}$

Exercice 3 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacun des fonctions suivantes :

1°) $h: \{-2;0;3\} \rightarrow \{-15;-8;7\};$ $x \mapsto 3x-2$	3°) $h:]-1;1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto 1-x^2$
2°) $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ $x \mapsto \frac{-x+2}{x+1}$	4°) $h: \mathbb{R} \rightarrow [-1;+\infty[$ $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$

Exercice 4 :

1°) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions $f, g, g \circ f, f \circ g$, puis calculer, dans chacun des cas suivants :

a°) $f(x) = \frac{5}{x+1}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$; b°) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; c°) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

$x \mapsto \frac{4x+1}{x^2-1}$ $x \mapsto \frac{4x+1}{x^2-1}$

2°) Calculer $g \circ f(x), f \circ g(x), f \circ f(x), g \circ g(x)$; $g \circ f(5); f \circ g(6)$ dans chacun des cas.

Exercice 5 :

I°) Soit l'application $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x + 8$.

Déterminer $g([-3; 2])$, $g([-2; -1])$, $g^{-1}([0; 1])$ et $g^{-1}([-3; -2])$.

II°) On considère l'application $f: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{2x-4}$.

1°) Montrer que f est bijective.

2°) Déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

3°) Soient les ensembles $A = [2; 4]$, $B = [0; 1]$, $C = \{2; 4; 6\}$ et $D = \{0; 3; 5\}$. Déterminer $f(A)$, $f(C)$, $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(D)$.

Exercice 6 :

I°) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = |2-x| - |3x+9| + 2$ et $g(x) = -4x - 5$.

Déterminer la plus grande partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

II°) On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = |2x-1| - |-x+5| - 2x + 3, \quad g(x) = \frac{|x|-|2x-1|}{|x|-1}, \quad h(x) = \sqrt{7-|5-x|} \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{\sqrt{|x+2|}}{|x|+1}.$$

1°) Écrire $f(x)$ sans la valeur absolue puis déterminer la restriction de f aux intervalles $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$, $]-\infty; \frac{1}{2}]$ et $[-1; 2]$.

2°) a°) Déterminer le domaine de définition de la fonction g .

b°) Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

c°) Expliciter la restriction de g sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3°) Écrire $h(x)$ et $p(x)$ sans la valeur absolue.

III°) On donne les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ et $g(x) = \frac{1}{x+3}$.

1°) Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g .

2°) f et g sont-elles égales ? Si non, trouver le plus grand sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.

Exercice 7 :

I°) Les fonctions suivantes sont-elles des applications ?

1°) $f: [4; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-x+7}{\sqrt{x-5}}$; 2°) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x^2 - 1$; 3°) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{4x^2 - 3}$;

4°) $k: \mathbb{R} - \{1; 7\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x+7}{(x-1)(x-7)}$.

II°) Déterminer le plus grand ensemble A pour que la fonction g soit une application dans chacun des cas ci-dessous :

1°) $g: A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-5x+4}}{\sqrt{-x-5}}$;

2°) $g: A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-5x+4}{13x+26}}$.

Exercice 8 :

I°) En justifiant votre réponse, dire si les applications suivantes sont injectives ou surjectives ou bijectives (dans le cas d'une application bijective, donner sa bijection réciproque).

1°) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{5\}, x \mapsto \frac{13x-1}{4x}$; 2°) $f: \mathbb{R} \rightarrow [7; +\infty[, x \mapsto x^2 + 16$; 3°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-3x^2+1}{2}$;

4°) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2$; 5°) $g: [1; 2] \rightarrow \left[\frac{1}{2}; 1\right], x \mapsto \frac{1}{x}$; 6°) $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

II°) Soient les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2 + 2x + 1$ et $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto (x+1)^2$.

1°) Justifier que f et g sont des applications puis écrire f sous forme canonique.

2°) f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 9 :

I°) On considère la fonction $f: \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

1°) f est-elle une application ? une bijection ? Justifier votre réponse. Si oui, déterminer sa réciproque f^{-1} .

2°) Construire la courbe représentative de f puis en déduire celle de sa réciproque f^{-1} dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

II°) On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^2 + x$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.

2°) f est-elle injective, surjective ou bijective ?

III°) 1°) Trouver la plus grande partie A de $\mathbb{R}$ pour que l'application $g: [1; 4] \rightarrow A, x \mapsto \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ soit surjective.

2°) Trouver la plus grande partie B de $\mathbb{R}$ pour que l'application $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow B, x \mapsto \sqrt{x}$ soit bijective.

3°) Déterminer les plus grands ensembles C et D pour que $g: C \rightarrow D, x \mapsto \frac{3x-1}{-x+3}$ soit une application bijective.

Exercice 10 :

Soit l'application $g: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}, x \mapsto \frac{x+3}{x+2}$.

1°) Montrer que g est une bijection.

2°) Déterminer la bijection réciproque g^{-1} de g .

3°) Calculer $g^{-1} \circ g(x)$ et $g \circ g^{-1}(x)$ puis conclure.

4°) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}, g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

5°) Déterminer $g(A)$ avec $A = [0; 1]$ et $g^{-1}(B)$ avec $B =]0; 1]$.

Exercice 11 :

I°) Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x+6}{x-3}$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = a + \frac{b}{x-3}$.

3°) Trouver l'image directe de $I = [4; 5]$ par f .

4°) Trouver l'image indirecte de $J =]3; 5[$ par f .

II°) Soit l'application $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow I, x \mapsto \frac{4+x^2}{2}$.

1°) Déterminer l'image directe par g des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $A = \mathbb{R}_+, B = [2; 6[$ et $C = \{0; 2; 6\}$.

2°) Déterminer l'image réciproque par g de : $D = [2; 10], E =]3; 4[$ et $F = \{0\}$.

Exercice 12 :

I°) On considère les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-1}{|x|+1}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| - 1$.

1°) Montrer que f et g sont égales.

2°) Calculer $g(-3)$ et $g(3)$. g est-elle injective ? Surjective ?

3°) Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

4°) Soit h la restriction de g à l'intervalle $] - 7; - 2]$. Quelle est l'image directe de $] - 7; - 2]$ par h ?

Exercice 13 :

Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$.

1°) Écrire $f(x)$ sans la valeur absolue.

2°) Montrer que : pour tout nombre réel x , on a : $|f(x)| < 1$.

3°) L'application f est-elle surjective ?

4°) Soit l'application $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

a°) Trouver l'ensemble de définition de g .

b°) Les fonctions f et g sont-elles égales ? Justifier votre réponse.

c°) Que représente f pour g ? et g pour f ?

Exercice 14 :

I°) Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{|x|+1}$.

1°) Déterminer la restriction de f aux intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

2°) a°) Vérifier que : pour tout $x \in] -\infty; 0]$, $f(x) = -1 + \frac{2}{1-x}$.

b°) On donne les ensembles $A = [-2; -1]$, $B = [-3; -2]$, $C = \{-3; -2; -1\}$ et $D = \{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\}$.

Déterminer $f(A)$, $f(C)$, $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(D)$.

3°) On considère l'application $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 1$.

Calculer en fonction de x , $h \circ f(x)$ et $f \circ h(x)$.

Exercice 15 :

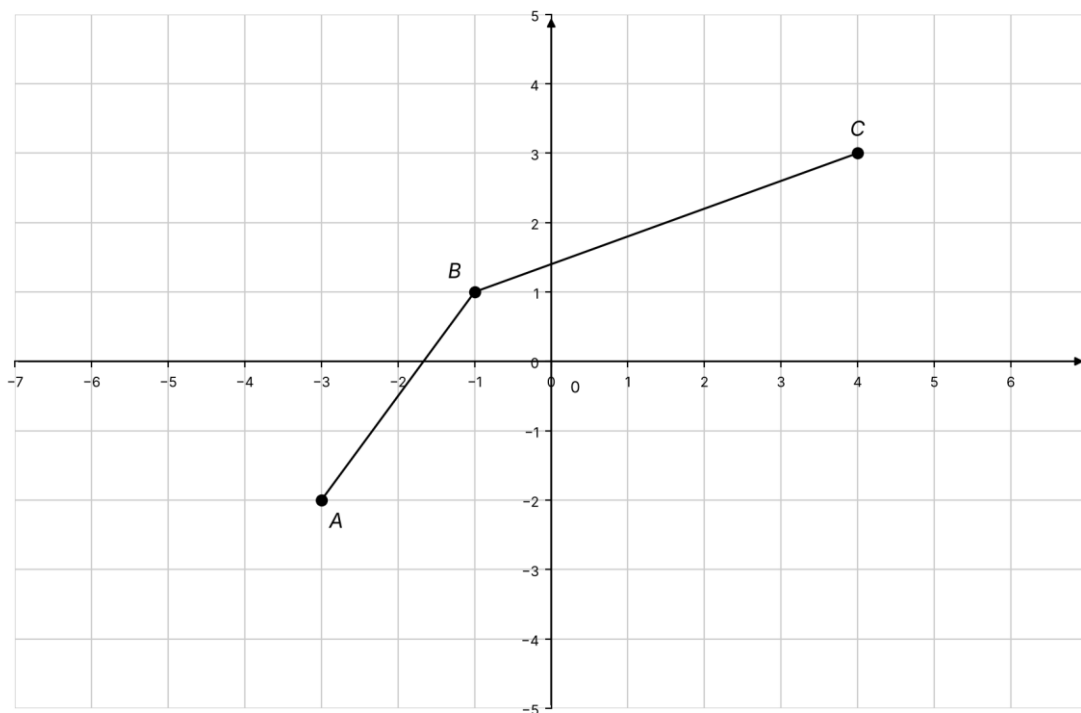
I°) Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{|2x-4|}{x+3}$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Quelle est la restriction de f à $[2; +\infty[$?

3°) Déterminer l'image directe par f de $A = \{0; 3; 1; 5; -2\}$ et $B = [4; 6]$.

II°) Soit la fonction g définie par le graphe ci-dessous.



1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

2°) Trouver les coordonnées des points A , B et C .

3°) Trouver l'image directe par g des intervalles et de l'ensemble suivants : $I = [-3; -1]$, $J =] -1; 4[$ et $K = \{-3; -1\}$.

4°) Trouver l'image réciproque par g des intervalles suivants : $L =]1; 3[$, $M =] -\infty; -3]$ et $N = [-2; 3]$.