

Complément du cours sur les fonctions polynômes et rationnelles**Exercice1 :**

- 1) Trouver la forme canonique des polynômes suivants puis en déduire une factorisation si possible
 - a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$
 - b) $g(x) = 3x^2 - 7x + 6$
 - c) $h(x) = -x^2 + 3x - 2$
 - d) $P(x) = -6x^2 + 19x - 15$
- 2) Etudier suivant les valeurs de x le signe des polynômes ci-dessus.
- 3) Développer réduire puis ordonner suivant les puissances décroissantes de x les polynômes suivants :
 - a) $f(x) = (x^2 + 5)^2 + (2x - 3)^2$
 - b) $P(x) = (x^2 + 1)^3 + (x^4 - 1)^3$
 - b) $R(x) = (x - 2)^5$
 - d) $S(x) = (x^2 + 2x + 3)^2$
 - e) $A(x) = (2x + 1)^4$
 - f) $B(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$

Exercice2 :

- I. Trouver le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division euclidienne du polynôme f par le polynôme g dans les cas suivants :
 - 1) $f(x) = \frac{3}{2}x^5 - 7x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ et $g(x) = 7x^2 - 5x + 6$
 - 2) $f(x) = x^5 + 21x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 12x + 32$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6$
 - 3) $f(x) = 2x^4 + 9x^3 - 3x^2 + x + 7$ et $g(x) = 7x^2 - 15x + 5$
 - 4) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ et $g(x) = \frac{2}{7}x^2 - 4x + 6$
- II. Montrer que la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que l'on précisera.

Exercice3 :

- A. Soit le polynôme $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
 1. Trouver les réels a et $b \forall \in \mathbb{R} f(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$
 2. En déduire une factorisation de $f(x)$
- B. On donne $k(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1$
 1. On pose $k(x) = (x - 1)q(x)$. Quel sera le degré de q ?
 2. Déterminer $q(x)$ et vérifier que $q(x) = (4x^2 + 2x - 1)^2$
 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $k(x) = 0$
- C. 1) Déterminer le polynôme P de degré 2 qui s'annule en -2 et 1 et qui prend la valeur 6 en 0
2) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x
- D. Soit P la fonction polynôme de degré 4 telle que : $P(0) = -10$; $P(1) = -11$; $P(-1) = -7$; $P(2) = 56$; $P(-2) = 4$. Trouver le polynôme $P(x)$

Exercice4 :

- i. Soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$
 1. Calculer $f(2)$ et $f(-3)$
 2. En déduire une factorisation de $f(x)$
 3. Trouver les zéros de f et leur ordre de multiplicité.
- ii. On donne $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$
 1. Calculer $P(2)$ et $P(-2)$
 2. Donner tous les zéros de P en précisant leur ordre de multiplicité
- iii. Soit le polynôme $g(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

1. Calculer $g(2)$
2. Déterminer les réels a ; b et c tels que $g(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$ et l'inéquation $g(x) > 0$

Exercice5 :

- 1) Après avoir déterminé l'ensemble de définition Df de f justifier l'expression de f dans les cas suivants :
 a) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^3-7x+6}$ b) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^3-19x-30}$ c) $f(x) = \frac{2x^3-3x^2-8x-3}{2x^3-x^2-5x-2}$ d) $f(x) = \frac{2x^3-7x-4}{2x^3+7x^2-53x-28}$
- 2) Etudier le signe de chacune des fonctions suivantes:
 a) $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{x^2-1}$ b) $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+1}$ c) $k(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+1}$
- 3) Déterminer le nombre réel a pour que 2 soit une racine du polynôme P défini par :
 $P(x) = 2x^2 - ax + 3a - 6$. Factoriser $P(x)$ et en déduire son autre racine.

Exercice6 :

1. Soit la fonction rationnelle définie par $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \frac{5x^2+2x}{x-1}$. Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
2. Soient g et h les deux fonctions polynômes définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = (x - 2)^2$ et $h(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$
 a) Effectuer la division euclidienne de f par g en précisant le reste r et le quotient q
 b) En déduire qu'il existe quatre réels a ; b ; c et d tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$
 $\frac{h(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx+d}{(x-2)^2}$

Exercice7 :

1. Soient f et g deux fonctions polynômes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $g(x) = (x - 1)^2$
 a) En effectuant la division euclidienne de f par g , montrer qu'il existe quatre réels a ; b ; c et d tels que $\forall x \neq 1$ $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$
 b) En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouver les constantes réelles a ; b et c telles que $\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$
2. Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{x-2}$. Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

Exercice8 :

- A) On considère les fonctions rationnelles définies par : $P(x) = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-1}$ et $Q(x) = \frac{3x^2-2x+5}{x-3}$
 a) Trouver un polynôme f de degré 2 et un nombre réel a tels que $\forall x \neq 1$ on a

$$P(x) = f(x) + \frac{a}{x-1}$$

 b) Trouver un polynôme g de degré 1 et un nombre réel b tels que $\forall x \neq 3$ on a

$$Q(x) = g(x) + \frac{b}{x-3}$$
- B) Soit K le polynôme défini par : $K(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

- Prouver que $\sqrt{2}$ et $(-\sqrt{2})$ sont deux zéros du polynôme K
- Déterminer un polynôme q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $K(x) = (x^2 - 2)q(x)$

Exercice9 :

Soit le polynôme P défini par : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$

- Calculer $P(1)$
- En déduire qu'il existe un polynôme Q du second degré tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$
- Factoriser $Q(x)$ après avoir trouvé sa forme canonique
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x
- Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes : $f(x) = \frac{1}{P(x)}$ et $g(x) = \sqrt{P(x)}$

Exercice10 :

- Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait : $a(x^2 + 9) + b(x^2 - 9) = 6^3$
- Déterminer les réels c et d tels que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait : $c(x + 3) + d(x - 3) = 12$
- On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{6^3}{x^4 - 81}$
 - Déterminer l'ensemble de définition Df de f
 - En déduire qu'il existe deux réels α' et β' tels que $\forall x \in Df$ on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha'}{x^2 + 9} + \frac{\beta'}{x^2 - 9}$$
 - Démontrer qu'il existe trois nombres réels $\alpha; \beta$ et γ tels que $\forall x \in Df$ on ait $f(x) =$

$$\frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-3} + \frac{\gamma}{x^2+9}$$

Exercice11 :

- Former un polynôme P du troisième degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}; P(x) - P(x - 1) = x^2$
En déduire une expression de la somme S_2 définie par : $S_2 = 1^2 + 2^2 \dots + n^2$
- Former un polynôme P du quatrième degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}; P(x) - P(x - 1) = x^3$
En déduire une expression de la somme S_3 définie par : $S_3 = 1^3 + 2^3 \dots + n^3$
- Calculer de façon analogue $S_4 = 1^4 + 2^4 \dots + n^4$

Exercice12 :

Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 14x + 8$. On admet que f admet trois racines réelles distinctes notées : $\alpha; \beta; \gamma$

- Calculer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ puis calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ sans calculer $\alpha; \beta$ et γ
- Calculer $f(-4)$ et déterminer alors les trois zéros de f et déterminer leurs ordres de multiplicité. Vérifier les résultats précédents.

Exercice13 :

- $g: \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-3)} \end{matrix}$ coïncide-t-elle sur $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ avec une fonction polynôme ?
- $f: \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} \end{matrix}$ Trouver Df et montrer que f est une fonction polynôme.
- Trouver le polynôme de degré 2 qui coïncide avec la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $\{0; 1; 8\}$

IV. Soit le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

- 1) Démontrer que $\forall x \neq 0$ on a : $P(x) = \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 \right]$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

Problème1 :

On donne $A(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ et $B(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

- 1) vérifier que 1 est une solution de l'équation $A(x) = 0$
- 2) Déterminer les réels $a; b$ et c tels que $A(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
- 3) On donne $a = 1; b = -7$ et $c = 12$ résoudre alors l'équation $A(x) = 0$ puis en déduire une factorisation maximale de A .
- 4) Résoudre l'inéquation $A(x) < -12$
- 5) Vérifier que 1 et (-1) sont deux solutions de l'équation $B(x) = 0$. Factorise alors $B(x)$
- 6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 15 = 0$ puis factoriser le trinôme $x^2 + 2x - 15$ et déduis-en une factorisation maximale de B
- 7) On pose $K(x) = B(x) - A(x) \forall x \in \mathbb{R}$
 - a) Calculer $B(3); B(1); A(3)$ et $A(1)$
 - b) En déduire deux racines de $K(x)$
 - c) Factorise $K(x)$
 - d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $K(x) = 0$
 - e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $K(x) < 0$
 - f) En déduire le signe du réel : $\delta = (2021)^4 + (2021)^3 - 8(2021)^2 - 21(2021) + 27$
- 8) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{A(x)} - \frac{6}{x-1}$. Déterminer Df puis simplifier l'expression de $f(x)$

Problème2 :

Soient $b; c; d$ et e des réels ; a un nombre réel non nul et f le polynôme défini par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- 1) On considère la propriété $(P): \forall x \neq 0 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$
 - a) Démontrer que si f vérifie (P) et α une racine non nulle de f alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de f
 - b) Démontrer que f vérifie la propriété (P) ssi $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$
En déduire en particulier que 0(zéro) n'est pas une racine de f
 - c) Application :
Soit le polynôme f défini par : $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$
Mettre $f(x)$ sous forme de produit de quatre polynômes de degré 1
- 2) On suppose désormais que f vérifie la propriété (P)
 - a) Démontrer que $\forall x \neq 0 : \frac{f(x)}{x^2} = a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$
 - b) Soit $\alpha \neq 0$, démontrer α est une racine de f ssi $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ une racine du polynome g défini par : $g(x) = ax^2 + bx + c - 2a$
 - c) Application :
Soient f et g les polynômes définis $\forall x \in \mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$ et $g(x) = 6x^2 - 35x + 50$
Déterminer les racines de g puis celles de f