



Exercices SUR LES Fonctions polynômes

1^{ère} Sciences 2023/2024

Exercice 1: Mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

- 1/ $f(x) = 2x^2 + 6x + 15$; 2/ $f(x) = x^2 + 4x + 5$;
 3/ $f(x) = 3x^2 + 9x + 1$; 4/ $f(x) = -x^2 - 5x + 4$;
 5/ $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$; 6/ $f(x) = x^2 - 8x + 7$;
 7/ $f(x) = 3x^2 + 18x + 27$; 8/ $f(x) = x^2 + 10x + 1$

Exercice 2: Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- 1) Calculer $P(2)$
 2) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation $P(x) = 0$
 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 3: Montrer que la fonction polynôme f définie par

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que l'on déterminera.

Exercice 4: Soit le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouver les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

Exercice 5: Soient f et g deux fonctions polynômes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4 \text{ et } g(x) = (x - 1)^2.$$

- 1) En effectuant la division euclidienne de f par g montrer qu'il existe 4 réels a , b , c , d telles que pour tout $x \neq 1$; $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$
 2) En utilisant la méthode des coefficients indéterminés trouver les constantes réels a ; b ; c telles que $\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

Exercice 6: Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$. Montrer qu'il existe trois réels a ; b ; c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

Exercice 7: Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$ dans chacun des cas suivants :

- 1°) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x - 1$
 2°) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x - 3$
 3°) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.

Exercice 8: Soit P la fonction polynôme de degré 4 telles que :

$$P(0) = -10 ; P(1) = -11 ; P(-1) = -7 ; P(2) = 56 ; P(-2) = 4.$$

Trouver le polynôme $P(x)$ pour tout nombre réel x .

Exercice 9: Soit le polynôme $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

- 1°) Trouvez les réels a et b tels que pour tout réel x , $f(x) = (x^2 + ax + b) - x^4$
 2°) En déduire une factorisation de $f(x)$.

Exercice 10: Déterminer le nombre réel a pour que 2 soit une racine du polynôme

$$P(x) = 3x^2 - ax + 2a - 12. \text{ Factorisez } P(x) \text{ et en déduire son autre racine.}$$

Exercice 11: 1)-Soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$.

- 1°) Calculer $f(2)$ et $f(-3)$

2°) En déduire une factorisation de $f(x)$

3°) Trouvez les zéros de f et leur ordre de multiplicité.

11)- On donne $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

1°) Calculer $P(2)$ et $P(-2)$

2°) Donnez tous les zéros de P en précisant leur ordre de multiplicité.

Exercice 12: Après déterminé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de $f(x)$ dans les cas suivants :

$$1) f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^3-7x+6};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^3-19x-30};$$

$$3) f(x) = \frac{2x^3-3x^2-8x-3}{2x^3-x^2-5x-2};$$

$$4) f(x) = \frac{2x^3-7x-4}{2x^3+7x^2-53x-28};$$

Exercice 13 : Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3+4x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$,

1) Détermine l'ensemble de définition de f

2) Trouve les réels a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$,

Exercice 14 : 1) Trouve les nombres réels A et B tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$,

En déduire la valeur de la somme S telle que :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)},$$

2°) Trouve les nombres réels A, B, C que : $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$,

En déduire la valeur de la somme S telle que :

$$S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

Exercice 15 : Soit le polynôme $f(x)$ définie par $f(x) = x^3 - 14x + 8$.

On admet que f admet trois racines réelles distinctes notées : $\alpha; \beta; \lambda$.

1) Calcule $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda}$ puis calcule $\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2$ sans calculer $\alpha; \beta; \lambda$.

2) Calcule $f(-4)$ et détermine alors les trois zéros de f et leurs ordres de multiplicité. Vérifie les résultats précédents.

Exercice 16 : 1°) Former un polynôme $P(x)$ du 3^{ème} degré tel que $\forall x \in \mathbb{R};$

$$P(x) - P(x-1) = x^2$$

En déduis une expression de la somme S_2 définie par : $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

2°) Forme un polynôme $P(x)$ du 4^{ème} degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}; P(x) - P(x-1) = x^3$

En déduis une expression de la somme S_3 définie par : $S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

3°) Calcule de façon analogue $S_4 = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.

EXERCICE 17 : Soit $P(x) = 2x^4 + x^3 - 26x^2 + 11x + 12$.

1. Vérifie que 1 et 3 sont des racines de P .

2. Factorise $P(x)$ en un produit de facteurs du premier degré.

3. Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \geq 0$.

EXERCICE 18 : Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ avec a et b réels.

1. Détermine a et b pour que -1 et 2 soient des racines de P .

2. Etudie le signe du polynôme g tel que $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$.

EXERCICE 19 : Soit a un réel. On considère le polynôme g de degré 3 défini par :

$$g(x) = x^3 - (3 + 2a)x^2 + (6a + 2)x - 4a.$$

1. Prouve que $g(2a) = 0$.

2. Ecris $g(x)$ sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

EXERCICE 20 : On considère le polynôme P défini par : $P(x) = -2x^3 - 2x^2 + 20x - 16$.

1. Donne la factorisation optimale de $P(x)$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$; l'équation $P(x) = 0$.
3. En déduis la résolution des équations suivantes :
 - a) $-2(x-1)^3 - 2(x-1)^2 + 20(x-1) - 16 = 0$.
 - b) $-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{20}{x} - 16 = 0$.

EXERCICE 21 : Soit a et b deux réels distincts. On définit le polynôme g par :

$$g(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b).$$

1. Calcule $g(a)$ et $g(b)$.
2. Factorise alors le polynôme g .

EXERCICE 22 : Soit le polynôme P défini pour tout réel x par : $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. On suppose que α, β et δ sont trois racines du polynôme P .

Démontre que :
$$\begin{cases} \alpha\beta\delta = -c \\ \alpha\beta + \beta\delta + \delta\alpha = b \\ \alpha + \beta + \delta = -a \end{cases}$$

EXERCICE 23 : Soit le polynôme P défini pour tout réel x par : $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$ où a et b sont des réels.

1. Détermine a et b pour que $P(x)$ soit factorisable par $(x^2 + 2x - 3)$.
2. On suppose que $a=3$ et $b=-8$. Résous alors l'inéquation $P(x) < 0$.

EXERCICE 24 : On suppose que a, b, c et d sont des réels et que f est un polynôme de degré 3 dont les racines sont α, β et δ avec $f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$.

1. Montre que
$$\begin{cases} \alpha\beta\delta = -\frac{d}{a} \\ \alpha\beta + \beta\delta + \delta\alpha = \frac{3c}{a} \\ \alpha + \beta + \delta = -\frac{3b}{a} \end{cases}$$
2. Calcule $\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$.

EXERCICE 25 : Soit $P(x) = 10x^3 + 29x^2 - 41x + 12$.

1. Vérifie que $\frac{1}{2}$ est un zéro de P . En déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Soit $Q(x) = \frac{P(x)}{8x^3 - 1}$.
 - a) Détermine le domaine de définition de Q .
 - b) Simplifie $Q(x)$.

EXERCICE 26 : On considère les polynômes P et Q tels que : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ et $Q(x) = x^2 - x - 2$.

1. Ecris $P(x)$ et $Q(x)$ sous la forme d'un produit de binômes.
2. On définit la fonction rationnelle f par : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
 - a) Détermine l'ensemble de définition de f .
 - b) Simplifie $f(x)$.