

On donne le polynôme P déterminé en fonction de x par $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ avec a et b deux réels.

SERIE D'EXERCICE N°2-LES POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES
CLASSE : 11^{ème} S

- Trouve a et b tels que
 - $P(x)$ soit divisible par $x - 2$
 - Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$ est -12 .
- Factorise $P(x)$.
- Soit le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 3x + 2$
 - Calcule $P(1)$ et détermine $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 1)Q(x)$
 - Vérifie que : $P(x) = (x + 2)(x - 1)^2$
- Soit α un réel tel que : $1 < \alpha < 2$
 - Donne un encadrement de $\alpha + 2$ et de $(\alpha - 1)^2$
 - Déduis-en que : $0 < P(\alpha) < 4$

Exercice 7 : Leibniz

On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$

- Vérifie que 0 n'est pas un zéro du polynôme P
- Montre que, si α est zéro du polynôme P , alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi un zéro du polynôme P .
- Vérifie que 2 est une solution du polynôme P .
- En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$, trouve un polynôme Q tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$
- Déduis-en que : $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
- Détermine les réels a, b et c tels que : $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$
- Déduis-en une factorisation du polynôme P . **On donnera P en produit de polynômes du 1^{er} degré.**

Exercice 8 : Néper

P est un polynôme de degré 3 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(x - 1) = x^2$ et $P(0) = 0$

- Calcule $P(-1), P(1)$ et $P(2)$
- Détermine le polynôme P
- Déduis-en une expression de la somme $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
- Détermine un polynôme P du quatrième degré satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

• Il admet -2 pour solution ;	• Il admet 180 pour reste de sa division par $x - 3$;
• Il est divisible par $x + 1$;	• $P(2) = 0$.
• Il admet le facteur x dans sa décomposition ;	
- Factorise complètement le polynôme P donné par sa formule : $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ sachant que : $P(-1) = P(-4) = 0$

Exercice 9 : Newton

Soit le polynôme f défini par : $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$. Le polynôme f a trois racines a, b et c toutes non nulles, sans calculer ses racines :

- Exprime $f(x)$ en fonction des réels a, b et c .
- Détermine : $a + b + c$; $ab + bc + ac$; abc ; $a^2 + b^2 + c^2$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
- Calcule $f(2)$ et détermine $f(x)$ sous forme de produit de trois polynômes de degré 1.
- Déduis-en les zéros du polynôme f et leurs ordres de multiplicité.
- Après avoir déterminer l'ensemble de définition, simplifie les fonctions rationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) &= \frac{x-1}{x^2-1} \\ \text{b. } g(x) &= \frac{3x^2-3}{2x+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } h(x) &= \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} \\ \text{d. } k(x) &= \frac{2x^3-3x^2-8x-3}{2x^3-x^2-5x-2} \end{aligned}$$

Exercice 10 : Archimède

On considère la fonction polynôme H défini par : $H(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

- Trouve trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R},$ on a : $H(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
- Déduis-en la factorisation de $H(x)$
- Résous dans l'équation : $H(x) = 0$
- On considère la fonction rationnelle l d'expression $l(x) = \frac{x^3+4x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$
 - Détermine D_l
 - Détermine quatre réels a, b, c et d tels que : $l(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$
- On considère les fonctions f et g définies sur $] -2 ; +\infty[$ par les relations : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{3x-3}{2x+4}$
 - Etablis l'égalité suivante : $f(x) - g(x) = \frac{-3x^3+5x^2-x-1}{(x^2+1)(2x+4)}$
 - Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) - g(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{(x^2+1)(2x+4)}$
- Détermine l'ensemble solution de l'équation : $f(x) - g(x) = 0$
- Dresse le tableau de signe $f(x) - g(x)$.