

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES

Site Pédagogique de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1 :

Résolvez les équations suivantes

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$; 3) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

4) $13x^2 - 7x - 20 = 0$; 5) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 4x + 3) = 0$;

6) $\frac{x^2 - x - 1}{x + 2} = 2x + 3$; 7) $(2x + 3)(4x - 1) = 20x + 9$; 8) $x + 1 = \frac{1}{x}$;

9) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{6}{5}$; 10) $\frac{4x-1}{x+3} = \frac{8-5x}{5x-1}$; 11) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x+5}{x+3}$;

12) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; 13) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; 14) $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$;

15) $(x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$; 16) $(x + 5)^4 - 6(x + 5)^2 - 7 = 0$;

17) $\left(\frac{3-4x}{5}\right)^2 - 2(3-4x) + 25 = 0$; 18) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$;

19) $\frac{x^2 + 2}{x} + \frac{8x}{x^2 + 2} = 6$; 20) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$;

21) $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5}$; 22) $\frac{3x-4}{x-2} - \frac{6(x-2)}{3x+4} = 1$;

23) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$; 24) $(x^2 - 5x + 6)^2 - (2x^2 - 5x + 1)^2 = 0$;

25) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$; 26) $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} + 4\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right) + \frac{8}{3} = 0$

Exercice 2 :

Trouver la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes sans les résoudre.

1) $10x^2 - 11x - 12 = 0$; 2) $(x - 2)(3x - 4) = 13$;

3) $(4x + 3)^2 - (3x + 1)^2 = 0$; 4) $7 + x = (2x - 1)(3x - 2)$;

5) $x^2 = \sqrt{2}(3x - \sqrt{2})$; 6) $(5k + 2)x^2 + 7kx - 8k = 0$

Exercice 3 :

- 1) Développer : $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- 2) Trouver deux nombres x et y sachant que leur différence est égale à 65 et la différence de leurs cubes est égale à 647855.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 - a) $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x)^2 - 8 = 0$; b) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + 6 = 0$;

Exercice 4 :

Résolvez les inéquations suivantes

- a) $-5x^2 + 3x - 2 > 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \leq 0$; c) $\frac{x^2 - x - 4}{2x^2 - x - 3} > 2$
- d) $\frac{2x - 8}{x^2 + 5x - 6} \leq \frac{1}{x + 2}$; e) $\frac{2x - 3}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$; f) $\frac{x + 1}{x} - \frac{2}{x + 1} \geq \frac{8}{x^2 + x}$
- g) $(x^2 + 3x + 5)^2 > 16$; h) $(3x + 2)^2 \leq (x^2 + 6x + 2)^2$;
- i) $(x - 5)(x^2 - 12x + 24) \geq 0$; j) $3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2}$; k) $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} \geq \frac{6}{5}$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles

- 1) $\sqrt{3x + 1} = 4 - x$; 2) $x - \sqrt{2x + 1} = 7$; 3) $1 + \sqrt{3x^2 - 2x - 1} = x$
- 4) $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} = x - 6$; 5) $\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 = 0$; 6) $\sqrt{x^4 - 12x^2 + 36} = x$
- 7) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 8} = 5$; 8) $3 - \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 2}$; 9) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{6x^2 + 1} = x + 1$
- 10) $\sqrt{\sqrt{x + 16} - \sqrt{x}} = 2$; 11) $x^2 - 6x - \sqrt{x^2 - 6x - 3} = 5$; 12) $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8} = 1$
- 13) $\sqrt{x - 3} + 1 > 0$; 14) $\sqrt{x^2 + 11} < 2x - 4$; 15) $x - 5 \leq \sqrt{x - 2}$
- 16) $\sqrt{-x^2 + 7x} \geq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; 17) $\sqrt{(x + 1)^2 + 3} - 3x > 2$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- 1) $|x - 2| < 3$; $|4x - 1| \geq 5$
- 2) $|6x^2 + 4x - 9| = 1$; $|-3x^2 + x - 7| \leq 9 - 2x$
- 3) $|x^2 - 2x - 15| = 33$; $|2 - x| + x = 4$
- 4) $|3 - x| - 2|x + 1| \leq 7x - 3$; $|5 - 3x| + 2|3x + 7| \geq 20$
- 5) $|2x - 5| - 3|x - 8| + |4 - x| = 15$; $|2x - 5| - 3|x - 8| + |4 - x| \geq 3x + 5$.

Exercice 7 :

On considère l'équation $(E_m): x^2 + 2(m-1)x + (m-1) = 0$

a°) Déterminer m pour que 1 soit une racine de l'équation (E_m) .

En déduire alors l'autre solution.

b°) Déterminer m pour que l'équation admet deux solutions distinctes.

c°) Déterminer m pour que l'équation n'admet pas de solution

d°) Déterminer m pour que l'équation admet une solution double.

e°) Déterminer m pour que l'équation admet deux solutions de signe contraire.

Exercice 8 :

Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations paramétriques suivantes

- 1) $(m-3)x^2 + (7-4m)x + 20 = 0$
- 2) $(m-1)x^2 - 2(m+3)x + m = 0$
- 3) $mx^2 - 2(m-2)x - 10 = 0$
- 4) $(m^2 - 4)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 1 = 0$.

Exercice 9 :

Etudier l'existence et le signe des racines des équations paramétriques

- 1) $(m+1)x^2 - 2mx + m^2 + 2m = 0$
- 2) $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 5 = 0$
- 3) $3x^2 - 2(5m-1)x + 3 = 0$
- 4) $(m-5)x^2 - (2m+3)x + m + 6 = 0$
- 5) $(m-4)x^2 - (m+3)x + m - 4 = 0$
- 6) factoriser $f(x) = (m^2 - 3m)x^2 - (2m^2 - 6m + 9)x + m^2 - 3m$ pour $\left(m \neq 0 ; m \neq 3 ; m \neq \frac{3}{2}\right)$. Trouver une relation entre les racines.

Exercice 10 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2 - (3k + 1)x + 8 = 0$ tels que ses racines x_1 et x_2 vérifient la relation $x_1^2 + x_2^2 = 20$. Trouver le paramètre réel k .

Exercice 11:

Soit l'équation paramétrique : $x^2 + (m + 1)x + m + 2 = 0$ tels que ses racines x_1 et x_2 vérifient la relation : $2x_1 + 3x_2 = -13$. Trouver le paramètre réel m .

Exercice 12:

Soit l'équation paramétrique : $(m + 2n)x^2 - (m + 2n)x + m - n = 0$
Trouver une relation entre m et n pour que l'équation admette 2 racines égales.

Exercice 13:

Soit l'équation paramétrique : $kx^2 + (k - 1)x + k - 2 = 0$ tels que ses racines x_1 et x_2 vérifient la relation : $\frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3} = \frac{3}{2}$. Trouver le paramètre réel k .

Exercice 14 :

Les racines de l'équation $x^2 - 5x + p = 0$ sont aussi solution de l'équation $x^3 + qx + 30 = 0$. Trouver $p + q$.

Exercice 15 :

1) Calculer $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$, si x_1 est une racine de l'équation $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$

2) x_1 et x_2 sont les racines d'une l'équation $(k + 1)x^2 - kx + k - 4 = 0$ qui vérifient $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} = 30$. Trouver le paramètre k .

Exercice 16 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2 + (k - 2)x + k - 6 = 0$. Si que cette équation admet deux racines négatives trouver alors les valeurs possibles de k .

Exercice 17 :

Soient p et q les racines de l'équation : $2x^2 - 5x + p^2 + q^2 = 0$.

Calculer le discriminant Δ .

Exercice 18 :

I°) Soit l'équation paramétrique (E) : $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m+2 = 0$.

- 1) Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines x' et x'' .
- 2) Pour quelles valeurs de m , l'équation admet 2 racines de signes contraires
- 3) Pour quelles valeurs de m , l'équation admet 2 racines positives
- 4) Etablir entre les racines une relation indépendante du paramètre m .
- 5) Déterminer m pour 2 soit une solution de l'équation (E).
- 6) Trouver l'autre racine.

II°) mêmes question pour (E_1) : $x^2 - 2(2m+1)x + 4m+3 = 0$.

Exercice 19 :

On considère l'équation paramétrique : $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$.

- 1) Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines x' et x'' .
- 2) Etablir entre les racines une relation indépendante du paramètre m . En déduire la valeur de x'' quand $x' = -2$. vérifier en calculant m , puis x' et x'' .
- 3) Déterminer m de façon que l'on ait : $5x' = -3x''$.

Exercice 20 :

On considère l'équation paramétrique (E_m) : $x^2 - 2(m+1)x + 3m+1 = 0$.

- 1) Discuter suivant les valeurs de m , l'existence des racines de (E_m)
- 2) Etudier le signe des racines x_1 et x_2 de (E_m)
- 3) Cette équation peut-elle se transformer en une équation du 1^{er} degré à une inconnue x ? pourquoi ?
- 4) a) Déterminer m de façon que les racines x_1 et x_2 vérifient la relation :
$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) - 2(x_1 + x_2)$$
b) Former l'équation (E) du second degré d'inconnue X admettant pour racines
$$T_1 = 2x_1 - 3x_2 \quad \text{et} \quad T_2 = 2x_2 - 3x_1.$$
c) Pour quelles valeurs de m cette équation (E) admet une racine unique ?
d) Calculer alors la racine unique pour chaque valeur de m trouvée.

Exercice 21 :

1) Former l'équation du second degré dont les racines x_1 et x_2 vérifient le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 3m - 5 \\ x_1x_2 - x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

2) Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation

$$(E') : x^2 - (7 - 3m)x + 6 - 3m = 0.$$

3) Déterminer m pour que les racines x_1 et x_2 de (E') vérifient la relation :

$$x_1 - 2x_2 = 1.$$

Exercice 22 :

Soit le trinôme $f_m(x) = (m - 2)x^2 - 2(m - 5)x + m - 15$.

On considère l'équation $(E) : f_m(x) = 0$.

1°) Résoudre (E) pour $m = 2$.

Dans la suite on supposera $m \neq 2$; x' et x'' désignent les solutions éventuelles de (E) .

2°) Discuter suivant les valeurs de m , l'existence et le signe des racines de (E) .

Existe-t-il des valeurs de m telles que (E) admette deux solutions x' et x'' vérifiant :

- a) x' et x'' sont distinctes et positives ?
- b) x' et x'' sont opposées ?

3°) Etablir une relation indépendante de m entre x' et x'' .

Utiliser cette relation pour déterminer x'' et $x' = 0$.

4°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles on a : $2 < x' < 3 < x''$.

5°) Peut-on déterminer m de telle sorte que l'on ait :

- a) Pour tout réel x ; $f_m(x) < 0$?
- b) Pour tout réel x ; $f_m(x) > 0$?

6°) Former l'équation du second degré d'inconnue X ayant pour solutions :

$$X' = (x')^2 + (x'')^2 \text{ et } X'' = 2x'x''.$$

En déduire les valeurs m telles que : $(x')^2 + (x'')^2 = 1$.

Exercice 23 :

Comparer 3 aux racines de l'équation paramétrique suivante :

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0.$$

Exercice 24 :

Soit l'équation paramétrique (E) : $(12m+1)x^2 - 2(6m-4)x + 3m = 0$.

- 1) Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles (E) admet deux solutions distinctes x' et x'' .
- 2) Calculer la somme $S = x' + x''$.
- 3) En supposant que x' et x'' vérifient la relation : $4x' + x'' = 1$; calculer alors x' ; x'' et m s'ils existent ?

Exercice 25:

Soit l'équation (E) : $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

- 1) Vérifier que si x' est une solution de (E) ($x' \neq 0$), alors son inverse $\frac{1}{x'}$ est aussi solution de (E).
- 2) Vérifiez que si x' est une solution de (E) ($x' \neq 0$), alors le nombre $X' = x' + \frac{1}{x'}$ est une solution de (P) : $X^2 - 4X + 3 = 0$.
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 26 :

1) Résoudre les systèmes suivants

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 10 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ x + y + z = 15 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x^2 + 3xy - y - 7x = 13 \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases} ; \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13} \\ x + 2y + 3z = 174 \end{cases}$$

2) Utiliser une transformation d'écriture ou un changement de variable pour résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2y - xy + y^2 = 19 \end{cases} ; \quad \text{b) } -1 \leq \frac{2x-5}{x+1} \leq 1 ; \quad \text{c) } \begin{cases} x + y = \frac{9}{2} \\ xy = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{2y} = \frac{15}{4} \\ \frac{9}{5x} - \frac{4}{y} = -5 \end{cases} ; \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{14}{x-1} - \frac{1}{y-5} = 2 \\ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-5} = 2 \end{cases}$$

EXERCICE 27 :

Résoudre et discuter selon les valeurs de m les systèmes

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x + my = 1 - \sqrt{2} \\ -mx + (1 + \sqrt{2})y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} ; & 2) & \begin{cases} mx - y = 2 - m \\ 3x + y = -5 \end{cases} ; \\ 3) & \begin{cases} mx - 3y = 5 \\ 3x + my = -1 \end{cases} ; & 4) & \begin{cases} mx + 4y = 3m - 2 \\ x + my = m^2 - 2 \end{cases} ; \\ 5) & \begin{cases} (m-1)x + (3m-2)y = 2 \\ (2m-1)x - 2y = m+2 \end{cases} ; & 8) & \begin{cases} (2m+3)x - y = m+2 \\ x - (2m+3)y = 2m+4 \end{cases} ; \\ 6) & \begin{cases} (2-m)x - 3y = 1-m \\ (m+4)x + (m-6)y = 2 \end{cases} ; & 7) & \begin{cases} (m-1)x + (m+1)y = m-5 \\ 2(m-3)x + (m+3)y = 2m-9 \end{cases} ; \end{aligned}$$

EXERCICE 28 :

Un groupe d'élèves réserve un voyage pour un montant total de 21600 F.
Pour 30 participants de plus il aurait obtenu une réduction de 20 F par billet et aurait payé un total de 24000 F.

Quel est le prix d'un billet et le nombre de participants à ce voyage ?

EXERCICE 29 : « l'âne et le cheval »

Un âne et un cheval chargés de sacs également pesants font chemin ensemble. L'âne se plaignant de sa charge, le cheval lui : « De quoi te plains-tu ! Si je prenais un de tes sacs, je serais chargé deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargé que toi ».

Combien de sacs porte chaque animal ?

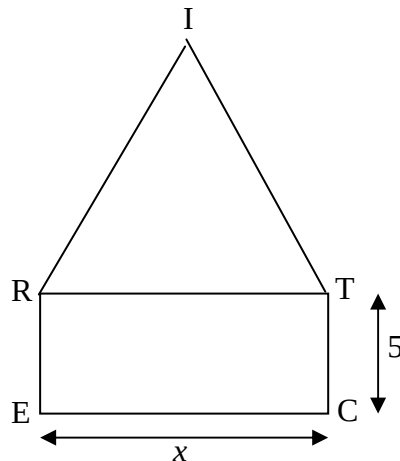
EXERCICE 30 : « la traversée du désert »

Deux automobiles de même modèle traversent ensemble le désert. Avant la dernière étape, les deux chauffeurs décident de répartir la réserve de carburant afin que les deux réservoirs contiennent la même quantité.

Il reste 40 litres dans la réserve, 9 litres dans l'un des réservoirs et 17 litres dans l'autre. Comment faut-il répartir les 40 litres de réserve ?

EXERCICE 31 : « un peu de géométrie »

Un rectangle **RECT** est surmonté d'un triangle équilatéral **TRI**.



- 1) Trouver x pour que **RECT** et **TRI** aient le même périmètre.
- 2) Trouver x pour que **RECT** et **TRI** aient la même aire.