

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

3.1. Rappel sur les équations du second degré

a) Définition

Soit la fonction polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$

On appelle équation du second degré toute équation de la forme $f(x) = 0$, c'est-à-dire $ax^2 + bx + c = 0$

b) Résolution

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, c'est déterminer les solutions réelles de cette équation.

Pour cela on distingue 3 cas sur Δ en se référant à la factorisation.

1^{er} cas si $\Delta < 0$

Alors l'équation n'admet pas de solution réelle

C'est-à-dire $S = \emptyset$

2^{ème} cas si $\Delta = 0$

On a : $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$

Puisque $a \neq 0$ alors $\begin{cases} x + \frac{b}{2a} = 0 \\ x + \frac{b}{2a} = 0 \end{cases}$ soit $x + \frac{b}{2a} = 0$

Alors $x = \frac{-b}{2a}$

Dans ce cas l'équation admet une solution(ou racine) double $x_1 = x_2 = x = \frac{-b}{2a}$

D'où $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

3^{ème} cas si $\Delta > 0$

On a $a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ c'est à dire:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On dit que l'équation admet deux solutions distinctes

D'où $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemple pratique 1

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes,

$$a) -3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad b) x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$c) 2x^2 + x + 11 = 0$$

Remarque

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Si $a + b + c = 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$

Si $a + b = c$ alors l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

Exemple pratique 2

Résoudre rapidement l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$

3.2. Somme et produit des racines d'une équation du second degré

a) Activité 1 en groupe de travail

On considère l'équation (E): $x^2 - 3x + 2 = 0$

- 1) Calculer les racines x_1 et x_2 de (E)
- 2) Calculer la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 \cdot x_2$
- 3) Quel est le lien entre (E), S et P ?

b) Résumé

Étant données les réels a, b et c avec $a \neq 0$.

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions distinctes x_1 et x_2 alors leur somme est $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et leur produit est $= x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Pour trouver deux réels x_1 et x_2 de somme S et de produit P donnés on se ramène à résoudre le système

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 = S \quad (1) \\ x_1 x_2 = P \quad (2) \end{cases}$$

On tire x_1 dans (1) et on le remplace par son expression dans (2).

On obtient une équation de la forme $x_2^2 - Sx_2 + P = 0$

De même si on avait tiré x_2 dans (1) puis le remplacer par son expression, alors on obtenait une équation de la forme

$$x_1^2 - Sx_1 + P = 0$$

On dira ainsi que les solutions x_1 et x_2 (S) sont solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple pratique 3

1) Trouver deux nombres réels de somme 8 et de produit 15.

2) Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

Remarque sur les signes des racines

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

La somme $S = -\frac{b}{a}$ et le produit $P = \frac{c}{a}$

On suppose que cette équation admet deux solutions (racines) distinctes x_1 et x_2

-Si $P > 0$ alors x_1 et x_2 sont de même signe

Elles sont positives lorsque $S > 0$ et négatives si $S < 0$

-Si $P < 0$ alors x_1 et x_2 sont de signe contraires.

Avec le signe de S on peut conclure laquelle des deux racines est la plus grande en valeur absolue.

-Si $P = 0$ alors l'une au moins des racines est nulle.

Lorsque $S > 0$ alors $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$

Lorsque $S < 0$ alors $x_1 < 0$ et $x_2 = 0$

Lorsque $S = 0$ alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

Exemple pratique 4

Soit l'équation $x^2 + x - 6 = 0$. Cette équation admet deux solutions réelles. Sans les calculer trouver leur signe.

3.3. Comparaison d'un nombre aux solutions d'une équation du second degré à une inconnue réelle

On considère l'équation du second degré

(E): $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2

On suppose que $x_1 < x_2$

Pour tout nombre réel α

-Si $af(\alpha) < 0$ alors $x_1 < \alpha < x_2$

-Si $af(\alpha) > 0$ alors $x_1 < x_2 < \alpha$ ou $\alpha < x_1 < x_2$

Dans ce cas lorsque $\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) > 0$ alors $x_1 < x_2 < \alpha$

Lorsque $\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) < 0$ alors $\alpha < x_1 < x_2$

-Si $af(\alpha) = 0$ alors α est une racine (solution) de (E)

Exemple pratique 5

Soit l'équation $x^2 + x - 6$ admettant deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_2$.

Sans les calculer comparer ces racines au nombre réel $\alpha = 3$

3.4. Équations bicarrées

a) Activité 6 en groupe de travail

Soit l'équation (E): $x^4 - 13x + 36 = 0$

Vérifier que les réels $-2, -3, 2$ et 3 sont solutions de (E).

Conclusion

On dit que (E) est une équation bicarrée (2 fois carré)

b) Définition

On nomme équation bicarrée toute équation de degré 4 de

la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$

c) Résolution

Pour résoudre une telle équation, on introduit une inconnue auxiliaire en effectuant un changement de variable en posant $X = x^2$.

Alors l'équation devient à

$$\begin{cases} X = x^2 & (1) \\ aX^2 + bX + c = 0 & (2) \end{cases}$$

On résout l'équation (2) puis on termine la résolution par changement de variable dans (1).

Exemple pratique 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

3.5. Recherche des zéros d'une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2

Exemple pratique 7

Soit le polynôme de degré 3 tels que

$$P(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

a) Vérifier que $P(1) = 0$

b) Trouver un trinôme du second Q tel que

$P(x) = (x - 1)Q(x)$ par la méthode de la division

euclidienne et la méthode des coefficients indéterminés.

c) Trouver les zéros de Q

e) En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

3.6. Résolution d'équations rationnelles

a) Définition

On nomme équation irrationnelle, toute équation dans laquelle figure le symbole radical.

b) Résolution

1) Équation du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Soient f et g deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et soit l'équation $(E_1): \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Pour résoudre (E) on procède aussi :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

2) Équation du type $\sqrt{f(x)} = ax + b$

Soit f une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2

Pour résoudre $E_2: \sqrt{f(x)} = ax + b$, on procède ainsi également :

1^{er} méthode (par implication)

- On élimine les radicaux par élévation au carré
- On résout l'équation sans radical
- On détermine parmi les solutions trouvées, celles qui sont solutions de (E_2)

2^{ème} méthode (par équivalence)

$$\text{Résoudre } \sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (ax + b)^2 \\ ax + b \geq 0 \end{cases}$$

Exemple pratique 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations rationnelles suivantes

- $\sqrt{4 - x^2} = x - 1$
- $\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$
- $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} = x - 6$
- $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$

3.7. Résolution d'inéquations irrationnelles

a) Définition

On appelle inéquation irrationnelle toute inéquation comportant des radicaux.

b) Résolution

On a les mêmes particularités de résolution que les équations en remplaçant seulement l'égalité par les inégalités.

Exemple pratique 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

- $\sqrt{3(x^2 - 1)} > 2x - 1$
- $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1} > 1$
- $\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} \leq 2$

3.8. Équation contenant un paramètre réel

a) Définition du paramètre

On nomme paramètre une quantité dans une équation ou dans une expression mathématique dont la valeur n'est pas fixée. En général, les paramètres sont désignés par les lettres $k, m, \dots$

b) Résolution

Exemple pratique 10

Soit l'équation du second degré

$$(E_m): (m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$$

- Résoudre (E) pour $m = 2$ et $m = -1$

On supposera que $m \neq -1$

- Déterminer les valeurs du réel m pour les quelles l'équation admet deux solutions de signes contraires
- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation admet deux solutions distincts positives.

Exemple d'entraînement

Exemple pratique 11

Soit g le polynôme défini par :

$$g(x) = x^2 + 2(m - 1)x + m^2 + 1$$

Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que g ait :

- Deux solutions de même signe
- Une solution double

3.9. Résolution d'inéquation contenant un paramètre réel

Exemple pratique 12

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m ,

$$\text{l'inéquation (I): } (m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 < 0$$

