

Exercice A9

1) a) Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}
 (1 + \cos x + \sin x)^2 &= (1 + \cos x + \sin x)(1 + \cos x + \sin x) \\
 &= 1 + \cos x + \sin x + \cos x + \cos^2 x + \cos x \sin x + \sin x + \sin x \cos x + \sin^2 x \\
 &= 1 + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x + 2\cos x + 2\cos x \sin x \\
 &= 1 + 1 + 2\sin x + 2\cos x + 2\cos x \sin x \\
 &= 2 + 2\sin x + 2\cos x + 2\cos x \sin x
 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$2(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2[1 + \sin x + \cos x + \cos x \sin x] = 2 + 2\sin x + 2\cos x + 2\cos x \sin x$$

Donc : $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \cos x + \sin x &= -1 &\Leftrightarrow 1 + \cos x + \sin x &= 0 \\
 &&\Leftrightarrow (1 + \cos x + \sin x)^2 &= 0 \\
 &&\Leftrightarrow 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) &= 0 \\
 &&\Leftrightarrow 1 + \sin x = 0 \text{ ou } 1 + \cos x = 0 \\
 &&\Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ ou } \cos x = -1 \\
 &&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi &\text{ avec } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x + \sin x = -1$ est :

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; x = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ est :

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; x = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Pour tout réel x on a : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$

Donc : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) $\cos x + \sin x = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

En utilisant les résultats du 2) b), on obtient alors

$$\cos x + \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les solutions de l'équation $\cos x + \sin x = -1$ sont donc les solutions de l'équation $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On retrouve alors d'après 2) a) : $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; x = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$