

TRIGONOMÉTRIE REPÉRAGE POLAIRE

I Angles orientés

Remarque

On considère le cercle de centre O et de rayon 1, que l'on appelle cercle trigonométrique.

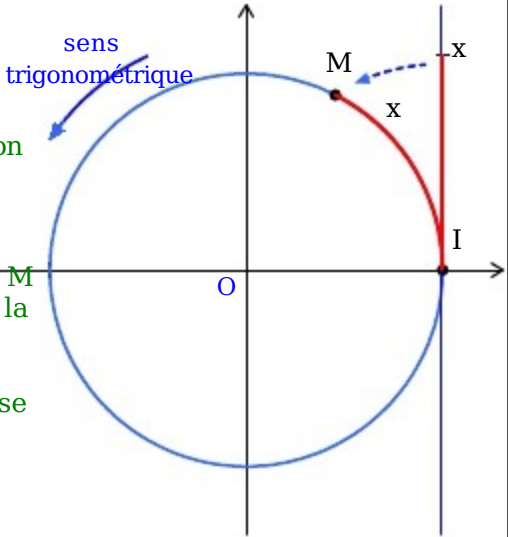
Le périmètre de ce cercle est 2π .

On considère la droite graduée Δ tangente au cercle en I.

Pour un réel x repéré sur la droite Δ , on considère le point M que l'on obtiendrait sur le cercle par "enroulement" de la droite Δ sur le cercle.

On dit que M est l'image sur le cercle du réel x .

Par convention l'enroulement se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé sens trigonométrique.



Examples

Le périmètre du cercle de rayon 1 étant égal à 2π ,

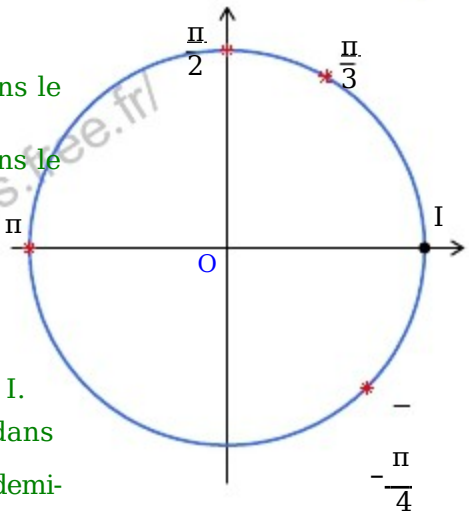
- le point correspondant à Π est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, un demi-cercle à partir de I.

- le point correspondant à $\frac{\pi}{2}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, la moitié d'un demi-cercle à partir de I.

- le point correspondant à $\bar{\Pi}$ est obtenu en parcourant, dans le

- sens trigonométrique, le tiers d'un demi-cercle à partir de I.

- le point correspondant à $-\frac{\pi}{4}$ est obtenu en parcourant, dans le sens inverse du sens trigonométrique, le quart d'un demi-cercle à partir de I.



Exercice 01 (voir [réponses et correction](#)) 2π

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

$$0 \leq \pi$$

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à 1020°

$$\frac{4\pi}{\sqrt{3}}; -\frac{9\pi}{\sqrt{3}}$$

Définition

On considère sur le cercle trigonométrique, le point M image du réel θ .

On dit que θ est une mesure en radians de l'angle

orienté $(\vec{OI}; \vec{OM})$.

degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité est de $\frac{\pi}{180}$ des radians aux degrés.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls déterminent un angle orienté noté $(\vec{u}; \vec{v})$.

En considérant un cercle trigonométrique, on définit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Remarque

Si k et k' sont des réels strictement positifs, les mesures des angles $(\vec{k}\vec{u}; \vec{k}'\vec{v})$ et $(\vec{u}; \vec{v})$ sont identiques.

Propriété (admise)

Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ un angle orienté et θ une mesure en radians de $(\vec{u}; \vec{v})$.

L'ensemble des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est l'ensemble des réels $\theta + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
c'est-à-dire qu'un angle est mesuré à un certain nombre de tours de cercle près. (l'entier k représente ce nombre de tours)

L'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ a une et une seule mesure dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, cette mesure est appelée

mesure principale de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.
Ainsi on pourra écrire $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

Remarques

- On assimilera souvent un angle orienté à ses mesures.

on n'écrit jamais $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ qui est une égalité fautive entre deux réels mais $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$[2\pi]$.

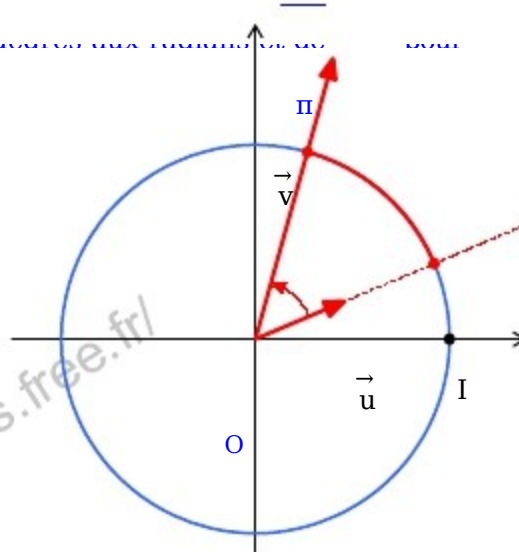
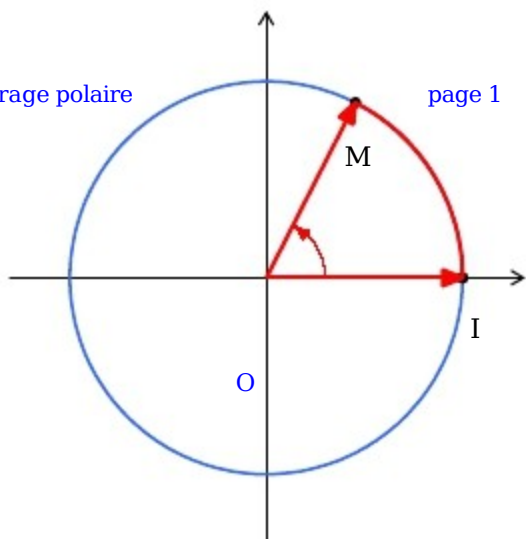
- Pour que deux réels x et y soient des mesures du même angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, il faut et il suffit que

$y - x$ soit un multiple entier de 2π (c'est-à-dire $y - x = k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
On écrira $y - x \equiv 0 [2\pi]$ ou $y = x + k \times 2\pi$.

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Déterminer les mesures principales des angles dont les mesures sont :

$\frac{7\pi}{2}$



$$OM_1 = 2 \text{ et } (i; OM_1) = \pi$$

$$OM_3 = 1 \text{ et } (i; OM_3) = 3\pi \quad \text{et} \quad (i; OM_4) = 7\pi$$

page 2

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$ placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 tels que :

$$\text{Soit } ABCD \text{ un carré de centre } O \text{ tel que } (AB; AD) = \frac{\pi}{2} \text{ (on dit que } ABCD \text{ est un carré)}$$

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer une mesure (en radians) de chacun des angles (aucune justification n'est demandée) :

$$\begin{aligned} & (AB; AC) ; (BO; BC) ; (DC; DA) ; (OA; OC) \\ & (CO; DA) ; (OC; BC) ; (DB; AB) ; (AO; CB) \end{aligned}$$

Propriétés (voir [justification 01](#))

- Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a :
 $(\vec{u}; \vec{u}) = 0 \text{ [} 2\pi \text{]} ; (\vec{u}; -\vec{u}) = \pi \text{ [} 2\pi \text{]}$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$, on a :
 $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) ; (-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) ; (\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \text{ [} 2\pi \text{]}$
et si k et k' sont deux réels strictement positifs $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et w , on a :
 $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; w) = (\vec{u}; w) \text{ (Relation de Chasles)}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ [} \pi \text{]}$ c'est-à-dire $(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ [} \pi \text{]}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriétés (voir [justification 02](#))

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ [} 2\pi \text{]}$
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ [} 2\pi \text{]}$
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = \pi \text{ [} 2\pi \text{]}$
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ [} \pi \text{]}$ c'est-à-dire $(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ [} \pi \text{]}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer $(\vec{u}; \vec{v}) ; (-\vec{u}; \vec{v}) ; (\vec{u}; -\vec{v}) ; (-\vec{u}; -\vec{v})$ Soient A', B', C' les milieux respectifs de $[BC] ; [AC] ; [AB]$.

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

1°) Soit ABC un triangle.
En déduire que $(BC; BA) = \pi$
Démontrer que $(AB; AC) + (BC; BA) + (CA; CB) = \pi \text{ [} 2\pi \text{]}$.
Justifier de même que $(CA; CB) = \pi$

3°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(AB; AC) = \frac{\pi}{3}$

Déterminer $(AC; AB)$; $(BA; BA')$; $(CA; CB')$; $(A'C; C'A)$; $(B'A; C'B)$ (on justifiera)

<http://xmaths.free.fr>

1èreS - Trigonométrie - Repérage polaire

page 3

II. Trigonométrie

Définition

On dit qu'un repère orthonormal $(O; i, j)$ est direct

2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, si M est le point du cercle trigonométrique image du réel x,

- l'abscisse de M est appelée cosinus de x, elle est notée $\cos x$ ou $\cos(x)$.
- l'ordonnée de M est appelée sinus de x, elle est notée $\sin x$ ou $\sin(x)$.

$\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$; $\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$; $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos 2\pi = 1$; $\sin 2\pi = 0$; $\cos -\pi = -1$; $\sin -\pi = 0$

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Donner les valeurs de :

2

2

2

2

2

2

Propriété (voir [démonstration 03](#))

Pour tout réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(L'expression $\cos^2 x$ désigne le carré de $\cos x$ c'est-à-dire $(\cos x)^2$ et de même $\sin^2 x$ désigne $(\sin x)^2$)

Calculer la valeur de $\cos x$.

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

x est un réel tel que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

Calculer la valeur de $\sin x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

que $\pi \leq x \leq 2\pi$ et $\cos x = 1$

x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\sin x = \frac{3}{4}$.

Calculer la valeur de $\cos x$.

Valeurs particulières

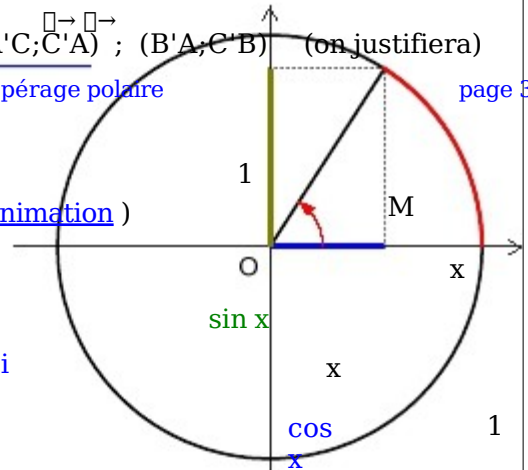
(voir [démonstration 04](#)) (voir [animation](#))

Définition

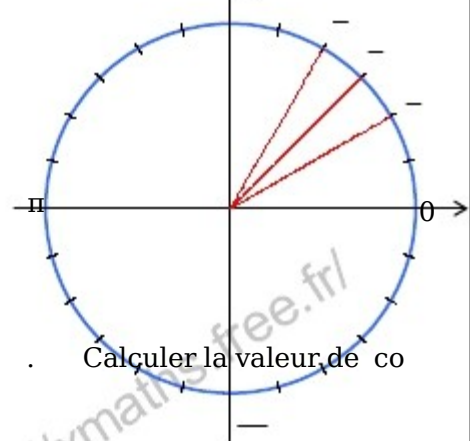
On appelle fonction cosinus la fonction : $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$

On appelle fonction sinus la fonction : $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



(voir [animation](#))



(voir [animation](#))

$\frac{\pi}{2}$
 $\frac{\pi}{3}$
 $\frac{\pi}{4}$

$\sin \left[\frac{\pi}{2} - x \right] = \cos x$ (voir démonstration 05)

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π .

<http://xmaths.free.fr>

1èreS - Trigonométrie - Repérage polaire

Pour tout réel x :

$$\sin (\Pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos (\Pi - x) = -\cos x$$

- Il faut savoir retrouver toutes ces égalités à partir du dessin.

$\cos \left[x - \frac{\pi}{2} \right] ; \quad \sin \left[x + \frac{\pi}{2} \right] ; \quad \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \right] \quad \left[2 \cos \left[\frac{\pi}{2} - x \right] \quad \sin \left[\frac{\pi}{2} - x \right] \quad \sin \left[\frac{\pi}{2} - x \right] \right]$
 permettent de transformer un cosinus en sinus et un sinus en cosinus

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

En remarquant que $\cos \frac{\pi}{12} - 2x = \frac{\pi}{4}$; $\sin(2x + \frac{\pi}{4})$; $\cos(2x + \frac{\pi}{12})$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\|2\| \quad \|4\| \quad ; \quad \|4\|$$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x ; \quad \sin 4x = 4\cos x \sin^3 x - 4\cos^3 x \sin x$$

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant les formules de duplication, déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Vérifier que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Merci d'évaluer Wondershare PDF Converter 4.0.5.

Avec la version d'essai, vous pouvez seulement convertir 5 pages au maximum.

Pour obtenir la version complète, veuillez commander le programme depuis :

<http://cbs.wondershare.com/go.php?pid=1431&m=db>

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \sin 2x ; \quad \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 2x ; \quad \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin 2x ; \quad \sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos 2x$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right)$$