

Exercice 1

- ① On considère l'application f définie par:

$$f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

- a** Déterminer les antécédents de 0 par f .
- b** Déterminer l'ensemble des antécédents des éléments 2 et 3.
- c** L'implication suivante est-elle vraie:
 $f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$? Justifier la réponse.

- ② On considère les ensembles suivants:

$$E = \{-\sqrt{5}; -\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}; \sqrt{5}\} \text{ et } F = \{1; 2; 5\}$$

- a** Définir une application de E vers F .
- b** Définir une application de F vers E .

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, montrer que les applications f et g sont égales:

1^{er} cas:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - \cos^6 x - \sin^6 x \quad x \mapsto 3 \cos^2 x \sin^2 x$$

2^{ème} cas:

$$f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - (\cos x - \sin x)^2 \quad x \mapsto \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

3^{ème} cas:

$$f:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Exercice 3

- ① On considère l'application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + x + 2$$

- a** vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

- b** Montrer que $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$

- ② On considère l'application

$$h: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$$

- a** vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) : h(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$
- b** Déterminer $h(]-\infty; -1])$.

Exercice 4

- ① Considérons l'application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 2x$$

Déterminer $f^{-1}([-1; 0])$ et $f^{-1}([2; +\infty[)$

- ② Considérons l'application

$$g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$$

Déterminer $f^{-1}([1; 2])$ et $f^{-1}(]7; +\infty[)$

Exercice 5

On considère les deux applications:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x| - 5x \quad x \mapsto g(x) = -4x$$

Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0; +\infty[$?

Exercice 6

- ① On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - |x| + 3$.
 Déterminer la restriction de l'application g à l'intervalle $]-\infty; 0]$.

- ② Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

- a** A-t-on l'implication : $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2);$
 $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$? Justifier votre réponse.
- b** Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$ vérifie l'implication précédente.

Exercice 7

- ① On considère l'application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 5x + 2$$

- a** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -4$.
b f est-elle injective?

- ② On considère l'application

$$g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

Montrer que g est injective.

- ③ On considère l'application

$$h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto h((x, y)) = (x, 0)$$

Est-ce que l'application h est injective?

Exercice 8

- ① Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application f est surjective:

1^{er} cas:

$$f:]-\infty, 3[\rightarrow]-\infty, 2[$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$$

2^{ème} cas:

$$f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$$

3^{ème} cas:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, \sqrt{2}]$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- ② Soit g l'application :

$$g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n^3 - n$$

- a** Montrer que g est injective.
b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ est paire.
c En déduire que g n'est pas surjective.

- ③ Soit h l'application:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow F$$

$$x \mapsto x^2 - 6x + 5$$

Déterminer F pour que h soit surjective.

Exercice 9

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$ par:

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

- ① Montrer que f est injective.
 ② Montrer que f est surjective.
 ③ En déduire que ff est bijective

Exercice 10

On considère l'application

$$f:]1; +\infty[\rightarrow]2; +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

- ① Montrer que f est bijective
 ② Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Exercice 11

- ① On considère les applications :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2+4}{x^2+1} \quad x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$$

Déterminer : $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$.

- ② On considère les applications :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 2 \quad x \mapsto 3 + \sqrt{x}$$

Déterminer : $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$.

Exercice 12

Considérons l'application $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

- ① Montrer que : si f et g sont injectives alors $f \circ g$ est injective.
 ② Montrer que : si f et g sont surjectives alors $f \circ g$ est surjective.
 ③ Montrer que : si f et g sont bijectives alors $f \circ g$ est bijective.
 ④ Montrer que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 13

On considère l'application :

$$f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto x + \frac{4}{x}$$

- ① Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{4}{x}\right) = f(x)$. f est-elle injective ?
- ② Montrer que : $f(]0; +\infty[) \subset [4; +\infty[$. f est-elle surjective ?
- ③ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
 - a Montrer que : $(\forall y \in [4; +\infty[); y - 4 - \sqrt{y^2 - 16} < 0$.
 - b Montrer que g est bijective de $[2; +\infty[$ sur $[4; +\infty[$.
 - c Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[4; +\infty[$.

Exercice 14

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 4x + 5$$

- ① a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f(2-x) = f(2+x)$.
b L'application f est-elle injective ? Justifier.
- ② a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq 1$.
b L'application f est-elle surjective ? Justifier.
- ③ Montrer que l'application f est une bijection de $[2; +\infty[$ vers $[1; +\infty[$ dont on déterminera sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 15

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

- ① a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} f(x) < 1$
b En déduire que l'application f n'est pas surjective
- ② a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} f(-x-2) = f(x)$
b L'application f est-elle injective? Justifier
- ③ Soit g la restriction de l'application f sur l'intervalle $] -1; +\infty[$
 - a Montrer que g est une bijection de $] -1; +\infty[$ vers $] -\infty; 1[$
 - b Déterminer g^{-1} la bijection réciproque de g

Exercice 16

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

- ① a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
b L'application f est-elle surjective ? Justifier.
- ② a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f(1-x) = f(x)$.
b L'application f est-elle injective ? Justifier.
- ③ Soit g et h les restrictions de f aux intervalles I et J respectivement.
 - a Montrer que l'application g est bijective de I sur l'intervalle K .
 - b On considère l'application :

$$u : J \rightarrow I \\ x \mapsto 1 - x$$

Vérifier que $h = g \circ u$ et en déduire que h est une bijection puis déterminer h^{-1} .

Exercice 17

On considère l'application :

$$f : \begin{matrix} [1; +\infty[& \rightarrow &]0; 1] \\ x & \mapsto & \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \end{matrix}$$

- ① Montrer que l'application f est injective
- ② Montrer que L'application f est surjective
- ③ En déduire que f est une bijective puis bijection réciproque

Exercice 18

On considère l'application :

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto & (x+y; x^2 - y^2) \end{matrix}$$

- ① Montrer que l'application f n'est pas injective
- ② L'application f est-elle surjective? Justifier

Exercice 19

Soit E un ensemble non vide et $A \subset E$

On considère l'application :

$$f : \begin{matrix} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{matrix}$$

Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A = \emptyset$