

Exercice : 01Partie A :

Soit g une fonction définie sur $[0; +\infty[$ $g(x) = 2 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

1) a- Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g'(x) = -3x\sqrt{x^2 + 1}$.

b- Dresser le tableau de variation de g .

2) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$.

b- Vérifier que $\alpha \in]0, 7; 0, 8[$.

c- En déduire que : $g(x) > 0$ pour $x \in [0; \alpha[$.

et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} - x + 1$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (o; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b- Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

c- En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

2) Soit D la droite d'équation $y = -x + 3$.

a- Montrer que D est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b- Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$.

c- En déduire la position relative de (C_f) par rapport à D .

3) a- Montrer que : $\sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{2}{\alpha^2 + 1}$ (où α est le réel trouvé dans A).

b- En déduire que $f(\alpha) = \alpha^3 + 1$.

4) Tracer D et (C_f) . (on prend $\alpha = 0,75$).

Exercice : 02

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral direct ABC . On désigne par I , J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1. a) Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme I en C et B en J .

b) Préciser l'angle de R et construire le centre Ω de R .

c) Montrer que Ω , B , C et I sont situés sur le même cercle Γ .

d) Soit E le symétrique de I par rapport à B . Montrer que $R(E) = B$.

2. Soit R' la rotation d'angle $\alpha \in]-\pi; 0[$ telle que $(R' \circ R')(K) = B$ et $(R' \circ R')(A) = J$.

a) Déterminer le centre et l'angle de la rotation R' .

b) Construire $\Omega' = R'(\Omega)$ et montrer que : $(\Omega\Omega')$ est tangente à Γ .

3) Soit M un point variable du plan. On désigne par $M_1 = R(M)$ et $M_2 = R'(M)$.

a) Montre que si M est distinct de I et Ω alors : $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MI}\right) = \left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right) [2\pi]$.

b) En déduire le lieu géométrique de M lorsque les points M , M_1 et M_2 sont alignés.

Fin.