

Série : Trigonométrie

Exercice 1 : ABC est triangle. On note par α , β et γ les mesures des angles géométriques de sommets respectifs A, B et C. Démontrer :

a) $\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha$ **b)** $\cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$ **c)** $\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$ **d)** $\cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \sin \frac{\alpha}{2}$

Exercice 2 : Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \qquad \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

Exercice 3 :

- En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
- En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
- Calculer $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$.
- En déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

Exercice 4 : Démontrer les égalités suivantes :

a) $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$ **b)** $\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

c) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ **d)** $\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = -\cot \frac{x}{2}$

Exercice 5 :

1. En utilisant les angles associés, montrer que :

$$A = \sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} - \sin \frac{7\pi}{8} = 0 \qquad B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} = 2$$

$$C = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

2. Vérifier que pour tout réel x , $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$

3. En déduire une expression simplifiée de : $D = \sin^3 \frac{\pi}{8} - \sin^3 \frac{3\pi}{8} + \sin^3 \frac{5\pi}{8} - \sin^3 \frac{7\pi}{8}$

Exercice 6 :

1. Exprimer $A(x) = \cos^2 2x - \cos^2 x$ en fonction de $\sin x$.

2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$ chacune des expressions suivantes :

a) $2\cos^2 x + 4\sin^2 x$ **b)** $\cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x$ **c)** $\cos^4 x - \sin^4 x$

Exercice 7 : Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D et E d'abscisses curvilignes respectives $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ (utiliser le rapporteur)

2. Quelle est la nature du polygone ABCDE ?

3. a) En utilisant la relation : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, montrer que $1 + 2\left(\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}\right) = 0$

b) En déduire que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$

c) Donner alors la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{5}$ et $\sin \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 8 :

1. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

2. On considère l'équation (E) : $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$.

a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation : $8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$

b) Résoudre (E) puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 9 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0$ e) $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

f) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ g) $|\tan x| \geq 1$ h) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ i) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

j) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ k) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ l) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ m) $-\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

n) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 1$

2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2\cos 4x - 1 = 0$ c) $1 - \sqrt{2}\sin x > 0$ d) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \geq 0$

f) $3\tan^2 x - 1 = 0$

3. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos 4x = 0$ b) $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin 2x = 1$ d) $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$

Exercice 10 : Résoudre dans l'intervalle I les équations et inéquations suivantes :

a) $\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$ $I = \mathbb{R}$

b) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ $I = [0; 2\pi[$

c) $4\cos^2 x - 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$ $I =]-\pi; \pi]$ d) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$ $I = [0; 2\pi[$

e) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$ $I = [0; 2\pi[$

Exercice 11 : On considère l'équation $\sin 3x = -\sin 2x$ (1)

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi; \pi]$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2. a) Démontrer que $\sin 3x = (4\cos^2 x - 1)\sin x$

b) En déduire que l'équation (1) est équivalente à : $(\sin x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

c) Parmi les solutions trouvées pour (1), les quelles sont aussi les solutions de l'équation :

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

3. a) En posant $X = \cos x$, résoudre $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

b) En déduire les valeurs exactes $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 12 : Résoudre dans I les systèmes d'équations et d'inéquations suivantes :

a) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad I = [0; 2\pi[$ b) $\begin{cases} \sin x < \frac{3}{2} \\ \cos x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad I = \mathbb{R}$ c) $\frac{1 - 2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0 \quad I = [0; 2\pi[$

$$d) \frac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x} < 0 \quad I = [0; 2\pi[$$

Exercice 13 :

- Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$, puis résoudre l'équation : $2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
- Résoudre l'inéquation $2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$
- Déduire de la question 1) les solutions de l'équation : $2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
Représenter les images des solutions sur le cercles trigonométrique.
- Déduire de la question 1) les solutions de l'inéquation : $2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Exercice 14 :

- En utilisant les formules d'addition, exprimer le produit $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$
 - Démontrer que $\sin a \sin b = -\frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2}$, $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$ et $\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$.
- En posant $a+b=p$ et $a-b=q$, démontrer que $\cos p + \cos q = 2\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- En déduire la transformation en produite de $\sin p + \sin q$, $\cos p - \cos q$ et $\sin p - \sin q$.

Première application :

- Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Deuxième application :

Résoudre $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ dans $[0; 2\pi[$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 15 : Sur le cercle trigonométrique (C) muni d'un repère ortho normal direct tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$. On considère les points B, C et D tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{2\pi}{3}$

- Faire une figure. Donner la mesure de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$.
- Démontrer que le triangle BDC est équilatéral quelle que soit la position de B.
 - Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 - Préciser une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ en fonction de x .
- Déduire des questions précédentes que pour tout réel x :
$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$
- Vérifier les égalités précédentes en utilisant les formules d'addition.

Bon courage !