

Exercice 16

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ et (Γ) sa courbe dans un repère orthonormé

- 1) Étudie les variations de f sur D_f .
- 2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - a. Montre que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
 - b. Déduis-en que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$.
 - c. Justifie que $\alpha \in [1; 2]$ puis détermine une valeur approchée de α à 0,01 près.
 - d. Déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g .
 - a. Calcule $g(3)$, $g^{-1}(16)$ et $(g^{-1})'(16)$.
 - b. Calcule $g(0)$, $g^{-1}(-2)$ et $(g^{-1})'(-2)$. Interprète le résultat de $(g^{-1})'(-2)$.

- c. Montre que $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{a^2 + 2a}$.
- d. Donne le tableau de variation de g^{-1} .
- 4) Construis (Γ) puis la courbe (Γ^{-1}) de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 17

- A. Soit $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α , avec $\alpha \in]-1, 0[$. Déduis-en le signe de $f(x)$.

- B. Soit les fonctions f et g définies par $g(x) = x^3 - 3x - 5$ et $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 5x$.

Le but du problème est d'étudier et de dresser le tableau de variations de f .

1. Étudie les variations de g puis dresser son tableau de variation.
2. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $\mathbb{R}$.
3. Donne un encadrement de β à 10^{-2} près.
4. Déduis-en le signe de g sur $\mathbb{R}$.
5. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variations.

Exercice 18

- A. Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où a , b et c sont des réels.

- 1) Calcule $f'(x)$.
- 2) Détermine les réels a, b, c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
- 3) Étudie la fonction f . Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $[-1; 0]$; une solution unique x_2 dans $[0; 1]$; une solution unique x_3 dans $[2; 3]$.
- 4) Déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

- B. Soit $h(x) = x^3 + ax^2 + bx$ où a et b sont des réels. Détermine a et b de façon que la fonction h admette un extremum pour $x = 1$ et un autre extremum pour $x = 3$.

- C. Soit $g(x) = ax^3 + bx + c$ où a, b et c sont des réels

Détermine les réels a, b et c sachant que :

- La courbe (C_g) de g admet un extremum égal à zéro au point d'abscisse 1.
- La courbe (C_g) passe par A (2 ; 4).

Exercice 19

- A. On donne $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + 2}{x^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels

1. Détermine les réels a, b et c sachant que les droites $(D_1) : x = 1$, $(D_2) : x = 2$ et $(D_3) : y = 0$ sont des asymptotes à (C_f) .
2. Étudie f et trace sa courbe.

- B. Soit $g(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$. Détermine a et b de sorte que (C_g) admet au point $I\left(\frac{0}{3}\right)$ une tangente parallèle à droite d'équation $y = 4x + 3$.

C. Soit $h(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$. Détermine les réels a et b de sorte que (C_h) passe par le point $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et admet au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite $y = -2x$.

Partie B-2: Les fonctions rationnelles

Exercice 20*

le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit (C) la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+2}.$$

- 1) Détermine le domaine de définition D_f de f .
- 2) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
- 3) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 3$.
 - a) Détermine trois nombres réels a , b et c tels que :
 $\forall x \neq -2; \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
 - b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C) .
 - c) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) .
- 4)
 - a) calcule $f'(x)$ et étudie son signe.
 - b) Dresse le tableau de variation de f .
- 5) Montre que le point $I(-2; -5)$ est centre de symétrie de (C) .
- 6) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 7) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
- 8) Construis (C) et ses asymptotes.

Exercice 21

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
2. Précise la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
3. Montre que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de la courbe.
4. Etudie les variations de f .
5. Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
6. Trace la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$
7. Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
8. Calcule $(g^{-1})'(\frac{5}{2})$.
9. Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa courbe représentative (Γ) dans le même repère que celle de f .

Exercice 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + \theta}$ où α, β et θ ont des réels.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f
Détermine les réels α, β et θ sachant que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote et la courbe (C) de f et (C) passe par le point $A(0; 4)$ et admet en A une tangente de parallèle à la droite d'équation $6x + 2y - 1 = 0$.
- 2) Détermine les limites de f aux bornes de D_f .
- 3) Détermine les réels $a; b; c$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
- 4) Montre que la courbe (C) de f admet une droite asymptote oblique (D) .
- 5) Étudie la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique (D) .
- 6) Étudie le signe de $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f .
- 7) Étudie le signe $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 8) Détermine une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse $x = 0$
- 9) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur -3 ? Si oui trouve ces points.
- 10) Montre que le point I intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C) .
- 11) Calcule $f(3); f(-3); (f^{-1})'(4)$.
- 12) Trace la courbe (C) , la droite (D) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
- 13) Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et le signe des racines de l'équation $x^2 - (m - 1)x - m + 4 = 0$.

Exercice 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-1}$, où a, b et c sont des réels.

Détermine les réels $a; b; c$ pour que la courbe (C) de f passe par les points $A(0; -6)$ et $B(2; 4)$, puis admet au point B une tangente de coefficient directeur égal à -3 .

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$. Soit (C) sa courbe.

- 1) a) Montre qu'il existe des réels $a; b; c$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
b) Déduis-en une équation de l'asymptote (Δ) non parallèle aux axes du repère, à la courbe (C) .
c) Étudie la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
- 2) Étudie les variations de la fonction f ;
- 3) Montre que le point I intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C) .
- 4) Donne une équation de la tangente à (C) en $x = 2$.
- 5) Trace dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe (C) et ses asymptotes.
- 6) Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et le signe des racines de l'équation $x^2 - (3 + m)x + m + 6 = 0$.

Exercice 24

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ où a, b, c, d sont des réels et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Détermine les réels $a ; b ; c$ et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points $A(2 ; 3)$, $B(4 ; 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1 ; b = -1 ; c = -5$ et $d = -3$
 - a) Etudie la fonction f
 - b) Etudie la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique
 - c) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $[4 ; +\infty[$ réalise une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - d) Calcule $g(5) ; g(6) ; (g^{-1})'(\frac{15}{2})$
- 3) Montre que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera
- 4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
- 5) Trace (Cf) dans le repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

Exercice 25

Partie A :

Soit le polynôme p défini par $p(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1. Calcule la limite de p en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calcule $p'(x)$ puis dresse le tableau de variation de p .
3. Montre que l'équation $p(x) = 0$ admet une solution unique α . Vérifie que $\alpha \in [0,6 ; 0,7]$.
4. Déduis - en le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$. On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calcule la limite de f en $-\infty, +\infty, 0^+$ et 0^- .
2. a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, f'(x) = \frac{p(x)}{x^2}$
 b) Déduis de la partie A, le signe de $f'(x)$.
 c) Dresse le tableau de variation de f .
3. Complète le tableau ci-dessous

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\alpha = 0,6$	1	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$							

Exercice 26

Partie A : Etude de la fonction auxiliaire

On considère le polynôme P définie : $P(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 9$

- 1) Calcule $P(1)$ et $P(3)$.
- 2) Détermine les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3-x)(ax^2+b)$.
- 3) Etudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude de la fonction f On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x-1)^2}$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f et montre qu'il existe des réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

- 2) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
- 3) Montre que la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est une asymptote à (Γ) . Précise l'autre asymptote
- 4) Démontre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^4}$. Déduis le signe de $f'(x)$ sur D_f .
- 5) Etablis le tableau de variation de f .
- 6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 1[$.
- 5) Montre que g réalise une bijection de $] -\infty; 1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
- 6) Déduis que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -\infty; 1[$.
- 7) Justifie que $\alpha \in [-1; 0]$ puis détermine une valeur approchée de α à 0,1 près.
- 8) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g . Calcule si possible $(g^{-1})'(-3)$.
- 9) Donne le tableau de variation de g^{-1} .
- 10) Construis (Γ) et ses asymptotes puis la courbe (Γ^{-1}) de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 27

Le but de l'exercice est d'étudier et de construire la courbe représentative (C) de la fonction f définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$$

Partie A : Soit $p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x$.

1. Vérifie que $p(x) = x(x+1)(x+4)(x-1)$.
2. Etudie le signe de $p(x)$.

Partie B : Etude de f :

1. Précise le domaine de définition de D_f de f
2. Etudie les limites aux bornes de D_f .
3. a) Calcule $f'(x)$ et montre que $\forall x \neq -1; f'(x) = \frac{p(x)}{(x+1)^4}$.
b) En se servant de la partie A, donne le sens de variation de variations de f .
c) Dresse le tableau de variations de f .

4. Montre qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que $\forall x \neq -1, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$.
5. Déduis - en que (C) admet une asymptote oblique (D) on donnera une équation cartésienne.
6. Etudie la position de (C) par rapport à (D) .
7. Démontre que l'équation : $x^3 + 3x^2 + 10x + 5 = 0$ a une unique solution réelle x_0 . Vérifie que $] -0,59; -0,58[$ est un encadrement de x_0 .
8. Donne une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse $x_1 = -2$.
9. Construis $(C), (T)$ et ses asymptotes.
10. a) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
 b) Trace la courbe de la bijection réciproque g^{-1} dans le même repère.
 c) Calcule $g(3)$ et en déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{89}{16}$. Donne le tableau de variation de g^{-1} .

Partie C

1. Détermine l'abscisse du point A de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à Δ .
2. Déduis-en graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solution de l'équation $f(x) = x + m$.
3. Montre que les abscisses des points d'intersections de (C) et la droite d'équation $y = x + m$ sont les solutions de l'équation $(E): (m - 1)x^2 + (2m - 9)x + m - 5 = 0$.
 Pour quelles valeurs de m , (C) et la droite d'équation $y = x + m$ ont-elles deux points communs Q et R ?

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm).

1) On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Etudie le sens de variation de g , et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

b) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2) a) Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f .

b) Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresse le tableau de variation de f .

3) a) Montre qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

b) En déduis que C admet une asymptote oblique Δ et étudie la position de C par rapport à Δ .

Vérifie en particulier que C rencontre Δ en un point unique A.

4) Détermine les abscisses des points B et B' de C admettant une tangente parallèle à Δ .

5) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.

6) Construis la courbe C .

Exercice 29

Partie A : On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2,19 < \alpha < 2,20$
- 3) Déduis - en le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B On considère la fonction numérique h à variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Précise son ensemble de définition.
- 2) Etudie les variations de h , puis dresse son tableau de variation.
- 3) a) Détermine les réels a, b, c et d tels que $\forall x \in D_h, h(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.
- b) Déduis-en que la courbe (C) de h admet une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.
- c) Etudie la position relative de (C) et Δ .
- 4) Trace la courbe (C) et ses asymptotes.

Partie B-3 : Analyse du Tableau de variation et des courbes

Exercice 30

Soit g la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

formule explicite : $g(x) = ax^3 + bx + c$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de g .
- 2) Calcule $g'(x)$.
- 3) Déterminer les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f .
- 4) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 1.
- 5) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 31

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

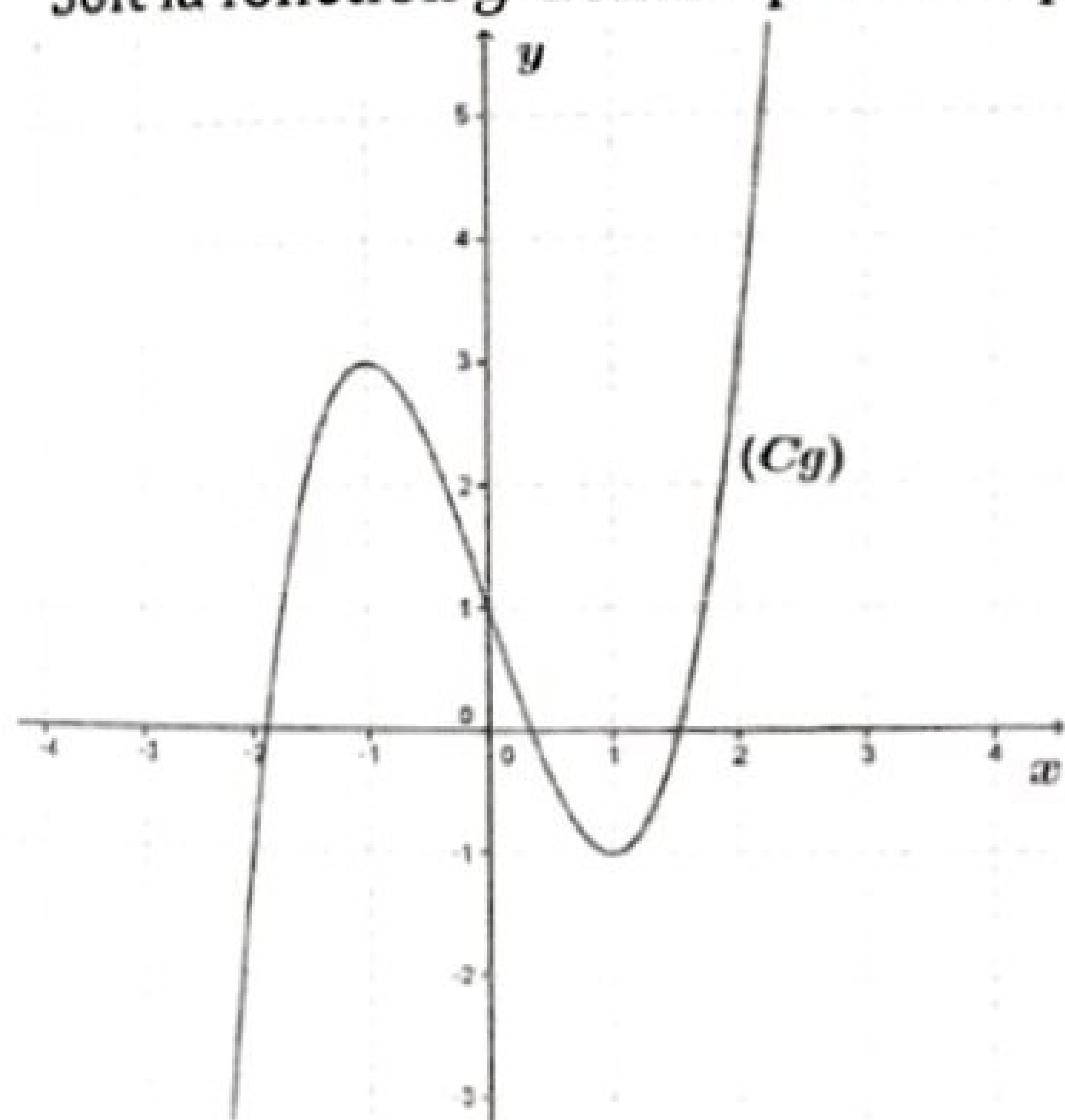
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

- 1) Calcule la dérivée f' de f .
- 2) Trouve les réels a , b et c en utilisant les données du tableau.
- 3) Montre que la courbe (C) admet une droite asymptote oblique (D) . Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 4) Donne le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .
- 5) Trace la courbe (C) de f et ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- 6) Interprète graphiquement le résultat de la question 4).

Exercice 32

Soit la fonction g définie par sa représentation graphique ci-dessous



A partir des renseignements fournis par la courbe (C_g) de g .

Détermine l'ensemble de définition D_g de g . g est-elle continue sur D_g ?

Détermine les limites de g aux bornes de D_g .

Détermine les extremums relatifs de (C_g) .

Dresse le tableau de variations de g .

On suppose que la fonction g a pour formule explicite : $g: x \mapsto ax^3 + bx + c$. Calcule $g'(x)$.

Détermine les réels a , b et c en utilisant les données de la courbe (C_g) de g .

Exercice 33

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 5x + 4|}$ et (C_f) sa courbe représentative

- 1- Trouve l'ensemble de définition de f (D_f).
- 2- Ecris $f(x)$ sans valeur absolue
- 3- Calcule les limites aux bornes de (D_f) .
- 4- Etudie les branches infinies à (C_f) .
- 5- Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et les asymptotes.
- 6- Etudie la continuité de f en 1 puis en 4.
- 7- Etudie la dérivabilité de f en 1 puis en 4. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.
- 8- Calcule la dérivée de f .
- 9- Dresse le tableau de variation de f .
- 10- Montre que la droite (Δ) d'équation $x = \frac{5}{2}$ est axe de symétrie à la courbe (C_f) .
- 11- Trace la courbe (C_f) .

Exercice 34

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Donne l'expression de $f(x)$ sans le symbole "valeur absolue".
- 2) Etudie la continuité et la dérivabilité de f , en particulier en 1 et en 5. La courbe admet-elle des tangentes en ces points ?
- 3) Etudie les variations de f .
- 4) Démontre que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie pour la courbe (C) .
- 5) Démontre que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à la courbe (C) .
- 6) Détermine les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe (C) avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
- 7) Soit I le point de coordonnées $(3; 0)$. Démontre que $\forall x \in [1; 5]$ le point M de coordonnées $(x, f(x))$ est à une distance constante du point I. Déduis - en la nature géométrique de la courbe (C) , lorsque $1 \leq x \leq 5$
- 8) Trace (C) et ses asymptotes.

Exercice 35

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$$

et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Détermine le domaine de définition D_f de f .
b) Etudie la dérivabilité de f au points $x_0 = -2$ et $x_1 = 1$.
c) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
- 2) Détermine l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe $(o; \vec{i})$.
- 3) Calcule les limites aux bornes de D_f et préciser les asymptotes à (C).
- 4) Trace (C) et ses asymptotes.
- 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -2]$.
a) Montre que h est une bijection de $]-\infty; -2]$ vers un intervalle J à préciser.
b) Soit h^{-1} la réciproque de h . Calcule $h^{-1}(5)$ et $(h^{-1})'(5)$.
c) Pour tout x de J , exprimer $h^{-1}(x)$.
6) Construis sur le même graphique que (C) la courbe (Γ) de h^{-1} .

Exercice 36

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et on désigne par } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans le}$$

plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Etudie les variations de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.
b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$ et vérifie que $1,28 < \alpha < 1,3$.
c) Détermine le signe de g sur $]1; +\infty[$.
2. a) Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1; +\infty[$.
b) Etudie la continuité de f en 1.
3. a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et en -1 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
b) Détermine l'ensemble de dérivabilité de f .
4. a) Démontre que
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} & \text{pour } x \in]1; +\infty[\\ f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{pour } x \in]-1; 1[\end{cases}$$

b) Etudie le signe de f' sur $]-1; 1[$.
5. Justifie que : $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0,15 < f(\alpha) < -0,10$.
6. Dresse le tableau de variation de f sur $[-1; +\infty[$.
7. Etudie les branches infinies puis donne l'allure de (C_f) .

Partie B-5 : Les fonctions paramétriques

Exercice 37

On donne la fonction polynôme f_m définie par $f_m(x) = (-m + 2)x^2 + 6x + 1$ où m est un paramètre réel. Le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Montre que toutes courbes (C_m) passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Trouve l'ensemble de définition de f_m .
- 3) Calcule les limites aux bornes de D_{f_m} suivant les valeurs de m .
- 4) Calcule la dérivée de f_m .
- 5) a) Dresse le tableau de variation de f_m suivant les valeurs de m .
b) Dresse le tableau de variation de f_{-1} , de f_3 et f_0 .
c) Montre que f_{-1} réalise une bijection de $] -\infty; -1]$ vers un intervalle I que l'on précisera.
- 6) construis les courbes (C_{-1}) , (C_3) et (C_0) dans le même repère.

Exercice 38

On considère les fonctions f_m définie par : $f_m(x) = \frac{x^2 - m}{mx + 1}$ où m est un paramètre réel.

- 1- Montre que pour toutes les valeurs de m , à l'exception de l'une que l'on précisera, les courbes (C_m) de f_m passent par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.
- 2- Détermine m pour que (C_m) passe par le point B(3 ; 5).
- 3- On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x + 4}$.
a) Etudie les variations de f et construis sa courbe (C)
b) A et B étant les points indiqués dans les questions 1 et 2. Peut-on trouver des points de (C) où la tangente à (C) est parallèle à la droite (AB) ? Si oui, calculer les abscisses de ces points.

Exercice 39

Soient m un paramètre réel et la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{1 - mx^2}{1 - x}$.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Etudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives (C_0) et (C_1) .

Exercice 40

Soient m un paramètre réel et la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Représente graphiquement la fonction pour $m = 0$.

Partie B-6 : Les fonctions circulaires

Exercice 41

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$.

1. Montre que l'on peut restreindre l'étude de f à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montre que $f'(x) = \cos x \cos 2x$
3. Donne pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ les signes de $\cos x$ et de $\cos 2x$. Déduis - en le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresse le tableau de variation de f .
4. Trace la courbe représentative de f lorsque $x \in [-\pi; \pi]$.

Exercice 42

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction f définie par : $f(x) = 4 \sin^2 x \cos 2x$.

1. Montre que f est périodique de période π .
2. Démontre que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C) .
3. Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \sin 2x (1 - 4 \sin^2 x)$
4. Dresse le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Trace la courbe représentative de f lorsque $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 43

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

- 1) Détermine D_f .
- 2) Montre que f est 2π périodique.
- 3) Compare $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Interprète graphiquement ce résultat.
6. Montre que l'on peut restreindre l'étude de f à $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 4) Dresse le tableau de variation de f sur I .
- 5) Trace la courbe représentative de f sur $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 44

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + \cos(2x)$

- 1- Quel est l'ensemble de continuité de f ?
- 2- Etudie la parité de f .
- 3- Etudie la périodicité de f .
- 4- Calcule l'expression de la dérivée de f et trouve les valeurs de x qui annulent cette dérivée.
- 5- On appelle g la restriction de f à $[0; \pi]$.
 - a) Etudie les variations de g .
 - b) Construis la courbe représentative (C_g) dans un repère orthonormé.

Exercice 45

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
2. Étudie la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E .
3. Montre que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
4. Étudie le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E .
5. Trace la courbe (C).