

TD SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 4);$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2);$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - x - 3);$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x + 6);$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 + 3x^2 - 1);$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 5}{x - 2}\right);$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x + 5);$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x + 5}{2x + 1}\right);$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x};$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - 2x + 5);$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 13} + \sqrt{x^2 - 1});$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1});$
13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x);$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x};$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x);$
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 7x^2 + 2x}{x^4 - 1}\right);$
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^5 + 3x - 1}{x - 1 + 4x^2}\right);$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)(2 - \sqrt{x + 5});$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3\right)^2;$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 4x + 1);$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x + 4}\right);$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-3}{x^2}\right);$
23. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1}\right);$
24. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}\right);$
25. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x + 5}{(x + 3)^2}\right);$
26. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^4 - 7x + 2}{2x^2 - 8x + 1}\right);$
27. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}\right)$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{9 - x^2};$
2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2 - x}{9 - x^2};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x^3 - 7x + 1}{2x(1 - x^2)}\right);$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - x - 2};$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4};$
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2};$
7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2};$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - \sqrt{12 + x^2}}{3x^2 - 7x + 2};$
10. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{2 - \sqrt{x^2 - x + 2}};$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 2} - \sqrt{11x - 6}}{x + 1 - \sqrt{x + 3}};$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x};$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \tan x\right);$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x};$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x};$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x};$
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sin^2 x + 2};$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x};$
19. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2x - \frac{\pi}{2}};$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2};$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x};$
22. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x};$
23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x};$
24. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x};$
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \left(\frac{1}{x}\right);$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x - \sin 2x}{5x};$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 3x \times \tan 5x}$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions f suivantes, détermine le domaine de définition; puis calcule les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f .

1. $f(x) = x^3 - 3x - 2x^2 + 1$;
2. $f(x) = -2x^2 + 5x$;
3. $f(x) = -x + 3 - 4x^2$;
4. $f(x) = 3x^4 + 4x^2 - 5$;
5. $f(x) = 1 - 3x + 11x^5$;
6. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$;
7. $f(x) = \frac{3 - x}{4x - 7}$;
8. $f(x) = \frac{1 - 2x + x^2}{3x^2 - 4x + 1}$;
9. $f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 9}$;
10. $f(x) = 2 + \frac{1}{x - 1}$;
11. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$;
12. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;
13. $f(x) = \sqrt{x + 4}$;
14. $f(x) = 2x - \sqrt{1 - x}$;
15. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;
16. $f(x) = \frac{2}{x - 4 - \sqrt{x^2 - 7x + 12}}$;
17. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$;
18. $f(x) = 2x + 5 + \frac{9}{x - 2}$.

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Exercice 4

1. Dans chacun des cas suivants étudie la continuité de f en x_0

- (a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{si } x < 3 \\ f(x) = \sqrt{8x - 12}, & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad x_0 = 3$
- (b) $\begin{cases} f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{2}, \end{cases} \quad x_0 = 0$
- (c) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad x_0 = 1$
- (d) $\begin{cases} f(x) = \frac{x - 2}{1 - 3x}, & \text{si } x \in [0; 1[\\ f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right), & \text{si } x \in [1; 2[\end{cases} \quad x_0 = 1$

2. Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{(2 + x)^2 - 4}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 5, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en $x = 0$.

3. Soit la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(2 + x)^2 - 4}{x} \\ f(0) = 5 \end{cases} \quad \text{étudier la continuité de } f \text{ en } x=0.$$

4. Soit les deux fonctions numériques $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+13} - 4}$

$$\begin{cases} x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+13} - 4}, & x \neq 3 \\ g(3) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il attribuer à m pour que g soit un prolongement de f par continuité au point $x = 3$?

5. Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = |x - 1| + \frac{2}{x + 1}$

(a) Étudier la continuité de f au point d'abscisse $x = 1$

(b) Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x = 1$.

6. Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer s'il existe le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}$ et $x_0 = 2$;

(d) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ et $x_0 = 0$;

(b) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $x_0 = 0$;

(e) $f(x) = \frac{x + 4}{|x| - 4}$ et $x_0 = 4$; $x_0 = -4$;

(c) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ et $x_0 = 0$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^3 + 1}$ et $x_0 = -1$

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

Exercice 5

Calcule la dérivée f' de la fonction dans les cas suivants :

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = -x^2 + 4x + 7$ | 8. $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ | 13. $f(x) = (4x - \sqrt{2})^3$ |
| 2. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + \sqrt{6}$ | 9. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$ | 14. $f(x) = (2x^2 - 6x + 7)^2$ |
| 3. $f(x) = x^2(1-x)$ | 10. $f(x) = 2x + 5 + \frac{9}{x-2}$ | 15. $f(x) = (\frac{4}{7}x^2 - 6x - 2x^3 + 4)^3$ |
| 4. $f(x) = (2x+3)(x^2-4)$ | 11. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-16}$ | 16. $f(x) = 2x^3 - \sqrt{2x+3} + \frac{2}{3x-1}$ |
| 5. $f(x) = (-4x^3-6)(x^3-4x^2+5)$ | 12. $f(x) = \frac{3^2-2x+3}{2-2x^2}$ | 17. $f(x) = \frac{\sqrt{5}-\frac{2}{3}}{2-\sqrt{3}}$ |
| 6. $l(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\cos^2 x}$; | | |
| 7. $m(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$; | | |

Exercice 6

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
- Étudier la dérivabilité en 0 de $x \mapsto x\sqrt{x}$
- Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$
 - Déterminer l'ensemble de définition de f
 - Étudier la dérivabilité de f en $+1$ et en -1
- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 1|$
 - Donner, suivant la valeur de x , l'expression de $f(x)$
 - Étudier la dérivabilité de f en 1
- Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 indiqué et donner une équation de la tangente ou des demi-tangentes à la courbe (C_f) au point x_0 :
 - $f(x) = 2x^2 - 4$; $x_0 = 1$
 - $f(x) = \frac{|x-3|}{1-x}$; $x_0 = 3$
 - $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $x_0 = 1$
 - $f(x) = \sqrt{x^3+8x}$ et $x_0 = 0$
 - $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+2x+1}$ et $x_0 = 0$

Exercice 7

- Détermine la fonction polynôme du second degré f telle que : $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$ et $f(1) = 3$.
- Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$.
 - Calculer les valeurs de a et b sachant que : $f(2) = 2$ et $f'(2) = 0$.
 - Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe représentative de f .

Exercice 8

- Dans chacun des cas suivants :
 - précise l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ;
 - détermine la dérivée de f et étudier son signe ;
 - dresse le tableau de variation de f .
 - $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
 - $f(x) = \frac{2x+5}{2-x}$; d) $f(x) = \frac{4x^2-11x-2}{x-2}$
 - $f(x) = \sqrt{2-3x}$; f) $f(x) = x - \sqrt{x}$
- Dans chacun des cas suivants :

- précise l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ;
 - détermine la dérivée de f et étudie son signe sur l'intervalle K ;
 - dresse le tableau de variation de f sur K .
- a) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ et $K =]0; \pi[$;
- b) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ et $K =]-\pi; \pi[$;
- c) $f(x) = \frac{1 - 3 \cos 3x}{\cos 3x - 2}$ et $K =]0; \pi[$.

ÉQUATION DE LA TANGENTE

Exercice 9

Déterminer une équation de la droite tangente à la courbe (C_f) de la fonction f au point d'abscisse x_0 :

- 1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 9$ $x_0 = -3$
- 2) $f(x) = 2x - \sqrt{3-x}$ $x_0 = 2$
- 3) $f(x) = (-x^2 + 4)^5$ $x_0 = -1$
- 4) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ $x_0 = -2$

ÉTUDE D'UNE FONCTION

Exercice 10

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où a ; b et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les réels a , b , c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
3. Étudier la fonction f .
4. Tracer la courbe (C_f) de f .

Exercice 11

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

1. calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
Trouver les réels a ; b et c en utilisant les données du tableau.
2. Montrer que la courbe (C_f) admet une droite asymptote oblique (D) . Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) .
3. Donner le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .
4. Tracer la courbe (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 12

1. Aux trois réels a ; b ; c on associe la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer les constantes a ; b ; c pour que (C) passe par les points $A(1; -2)$; $B(-4; 8)$; et admette au point $x = 2$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 4}{x}$

- Étudier les variations de la fonction f .
- Montrer que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de la courbe (C) .
- Étudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique (Δ) .
- Construire la droite (Δ) et la courbe (C) .
- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 + (3 - m)x - 4 = 0$.

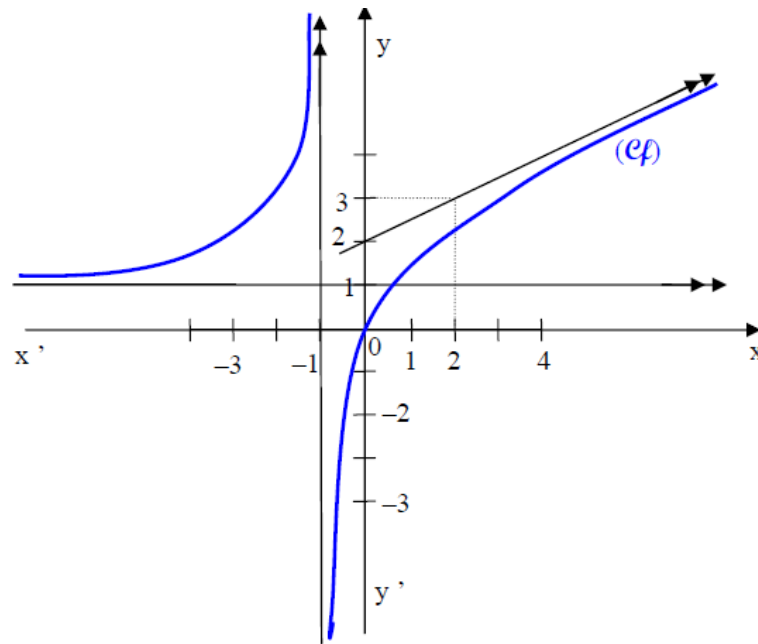
Exercice 13
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+4}{-x+1}$. soit (C_f) la courbe de f .

- Étudier les variations de la fonction f .
- Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $x = 0$;
- Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) ?
- Tracer la courbe (C_f) de f .
- Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$

parallèle à l'axe des abscisses ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

Exercice 14

- Soit f la fonction définie par sa représentation graphique ci-dessous



A partir des renseignements fournis par la courbe (C_f) de f Déterminer :

- le domaine de définition D_f de f .
- les limites de aux bornes de D_f .
- une équation de chacune des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
- Le tableau des variations de f .

Exercice 15

I) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + C}{x - 1}$.

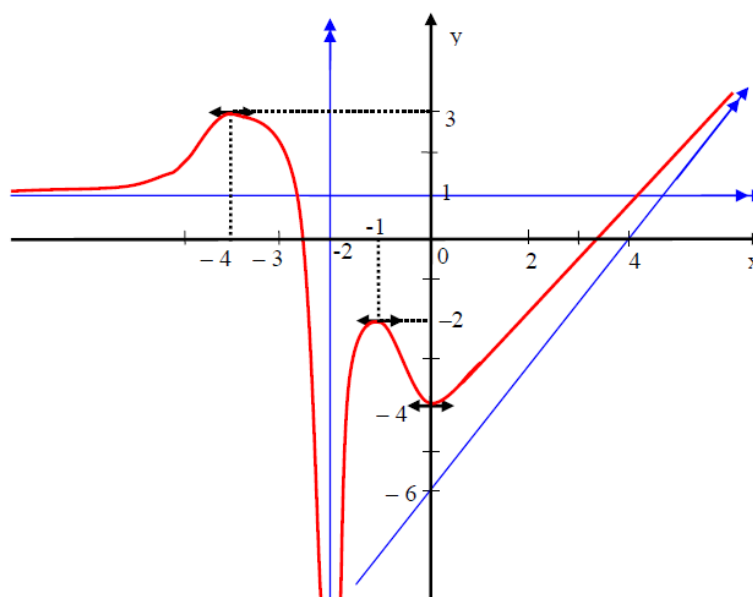
Déterminer les réels a ; b ; c tels que la courbe (C_f) de f passe par les points $A(0; 6)$ et $B(2; 4)$, puis admet au point B de (C_f) une tangente de coefficient directeur égal à -3 .

II) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. Soit (C_f) sa courbe.

1. Étudier les variations de la fonction f ;
2. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$. En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) à la courbe (C_f) .
3. Montrer que le point I intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C_f) .
4. Donner une équation de la tangente à (C_f) en $x = 2$.
5. Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe (C_f) .
6. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et le signe des racines de l'équation $x^2 - (3 + m)x + m + 6 = 0$.

Exercice 16

Soit f la fonction donnée par sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Donner les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f .
3. Donner les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Donner l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 17

Le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est orthonormé. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est impaire et périodique, de période 2π .
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
4. Tracer (C_f) sur $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x - 1| - \frac{2}{x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .

4. La fonction f est-elle continue au point 1 ?
5. La fonction f est-elle dérivable au point 1 ? Que peut-on dire ?
6. Étudie les variations de f .
7. Montre que les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = -x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C) et f .
8. Trace (C) .

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Étudier la fonction g (limites et sens de variations)
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α .
3. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B :

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis déduire le tableau de variation de f .
2. (a) Montrer que $\forall x \in D_f; f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$
(b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ et $+\infty$.
(c) Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
3. Tracer la courbe (C) et la droite (D) .

Partie C :

1. Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.
2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.
3. En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation $f(x) = m + x$

Exercice 20

1. Détermine une primitive de f dans chacun des cas suivants :

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = 3x^2 - x + 1;$ | (d) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 3}};$ |
| (b) $f(x) = x^3(x^4 - 5)^2;$ | (e) $f(x) = \frac{x}{(\frac{1}{2}x^2 + 5)^4};$ |
| (c) $f(x) = \frac{x^6 - 2x^5 + 2x - 2}{x^4}$ | (f) $f(x) = (-2x + 1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4}$ |

2. Soit $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$

- (a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
- (b) Détermine les réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$.