

POLYNÔMES

2024-2025



SCIENCES

1^{re} 1^{ère} ME

Forme canonique et Parabole

1 a. Ecrire sous forme canonique les polynômes du second degré

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

c) $f(x) = x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$
avec $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$

d) $f(x) = 0,75x^2 - 0,5x - 0,25$

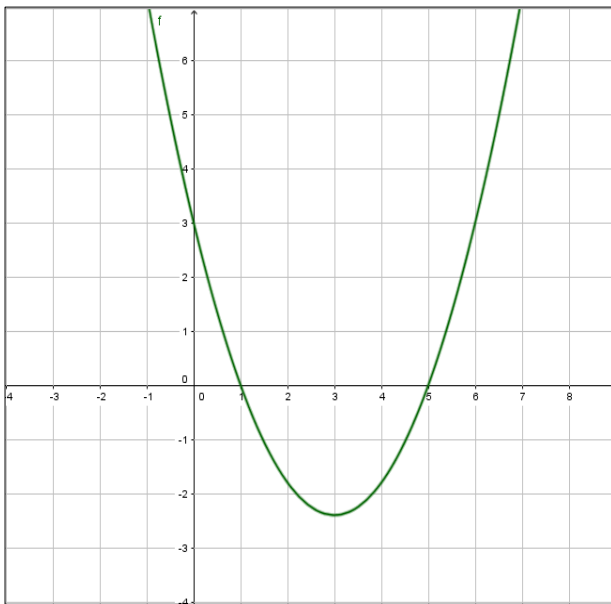
e) $f(x) = x^2 + 5 \cdot 10^{14}x - 5 \cdot 10^{29}$

f) $f(x) = \pi^2 x^2 + 2\pi x - 3$

g) $f(x) = x^2 - ax - a^2$

b. En déduire (si possible) la forme factorisée de chacun de ces polynômes donnés en question a.

2 Soit f un polynôme du second degré défini par sa représentation graphique :



1. Déterminer graphiquement :

a. L'antécédent par f de l'ensemble $A = \{0; 3\}$ b. L'image par f de l'ensemble $B = \{-\frac{1}{2}; 0; 3\}$

2. En utilisant cette représentation et les résultats précédents, déterminer la formule explicite de f

3. Dresser son tableau de variation puis donner la nature et la valeur de l'extremum.

3 On donne le polynôme du second degré P définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $P(0) = -4$

1. Déterminer les réels $a; b$ et c tels que : $P(2) = 94$ et $P(-1) = 82$

- Déterminer la forme canonique de P puis en déduire si possible une factorisation P .
- En déduire si possible tous les zéros du polynôme P .

4 Soit g un polynôme du second degré et (Γ_g) sa représentation graphique de sommet $S(2; -9)$.

- Déterminer la forme canonique du polynôme g sachant que (Γ_g) passe par le point $A(1; 3)$.
- En déduire la forme développée et si possible la forme factorisée de g .

5 Soit le polynôme du second degré h définie par son tableau de variation

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	5	1	$+\infty$

- En utilisant le tableau de variation ci-dessus, donner sa forme canonique puis sa forme développée.
- Déterminer les antécédents de 0 par h et l'image de 0 de par h puis en déduire sa forme factorisée.
- Faire une représentation graphique du polynôme h .

Zéros et Factorisation d'un polynôme

1 Soit le polynôme g définie par :

$$g(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54.$$

- Montrer que g est divisible par $(x - 3)^2$.
- Donner une factorisation de g en produit de facteurs premier degré.
- Quel est l'ordre de multiplicité de 3 pour g ?

2. Donner un zéro évident de f dans chaque cas :

- $f(x) = x^4 - 8x^3 - 18x - 27$
- $f(x) = 2x^4 - 20x^3 + 72x^2 - 108x + 54$
- $f(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$
- $f(x) = 12x^{21} - 5x^{14} + 17x^7 + x$

2 Soit le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 12$$

- Déterminer le polynôme du second degré Q tel que $P(x) = B(x) \times Q(x)$

avec $B(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

- Donner une factorisation pour chacun des polynômes B et Q.
- En déduire toutes les racines de P.
- Factoriser le polynôme P de zéro α dans les cas suivants :
 - $P(x) = x^3 + x^4 - 7x - 9x^2 + 14$ et $\alpha = -2$
 - $P(x) = -12 + 11x^2 + x^4 + 7x^3 - 7x$ et $\alpha = -4$
 - $P(x) = x^5 - 5x^2 + 4x$ et $\alpha = -2$.
 - $P(x) = x^3 - (2\sqrt{5} + 3)x^2 + (6\sqrt{5} - 15)x + 45$ et $\alpha = 3$

3 Soit le polynôme H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = 10x^3 + 33x^2 + 23x - 6$$

- Montrer que -2 est un zéro de H.
- Donner la forme canonique de :
 $h(x) = 10x^2 + 13x - 3$ et en déduire sa forme factorisée.
- Déterminer les réels n; m et p tels que :
 $H(x) = (x + 2)(nx^2 + mx + p)$
- En déduire une factorisation de H en produit de facteurs de premier degré.
- Donner tous les zéros de H.

4 Soit le polynôme M définie par :

$$M(x) = 6x^4 + 21x^3 - 96x^2 - 165x + 450$$

- Calculer $M(2)$ et $M(-3)$ puis conclure.
- Déterminer les réels a, b et c tels que :
 $M(x) = (x + 3)(x - 2)(ax^2 + bx + c)$
- Déterminer le polynôme Q tel que :
 $M(x) = (x + 3)(2x - 5) \times Q(x)$.
- Factoriser M en facteurs de premier degré puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $M(x) = 0$.

5 On donne le polynôme F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 16x^3 - 72x^2 + 80x - 24$$

- Déterminer les réels a; b et c tels que :
 $F(x) = a(2x - 1)^3 + b(2x - 1)^2 + c(2x - 1)$.
- Factoriser le polynôme F en produit de facteurs de premier degré.
- En déduire tous les zéros de F.

6 Soit le polynôme P défini par

$$P(x) = 2x^5 + x^3 - 250x - 125$$

- Détermine les réels a et b pour que P s'écrive :
 $P(x) = (2x^2 + 1)(ax^3 + b)$
- Donne si possible les zéros de P

Polynôme et Zéros inconnus

1 Soit le polynôme P définie par :

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$ et les réels $\alpha; \beta; \gamma$ les racines de P.

- Donner la forme factorisée de P en fonction $\alpha; \beta$ et γ .
- Montrer que : $\alpha + \beta + \gamma = 2$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -23$ et $\alpha\beta\gamma = -60$ sans calculer $\alpha; \beta$ et γ .
- Déterminer les autres racines de P sachant que $\alpha = 3$.
- En déduire la solution de l'inéquation $P(x) \leq 0$ dans $\mathbb{R}$.

2 Soit le polynôme R définie par :

$$R(t) = t^3 - 14t + 8$$
 et u, v, w les trois zéros de R.

- Calculer $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ et $u^2 + v^2 + w^2$ sans calculer u, v et w.
- Calculer $R(-4)$ et déterminer alors les trois zéros de R.
- Vérifier les résultats précédents.

Décomposition en éléments simples

1 Soit la fonction rationnelle Q définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 5}{x^2 - x - 2}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de Q
- Déterminer les réels u; v et w tels que :
 $x^3 + 4x^2 + x - 5 = (x + 3)(ux^2 + vx + w) + 1$
- Déterminer les réels a; b; c et d tels que :
 $Q(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - x - 2}$
- Déterminer les réels $\alpha; \beta; \gamma$ et δ tels que :
 $Q(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 2} + \frac{\delta}{x + 1}$.

2 Soit les fonctions rationnelles définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 2}; g(x) = \frac{4x + 1}{5x + 1}; h(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

- Déterminer $D_f; D_g$ et D_h
- Déterminer les réels a, b et c tels que :
 $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
- Déterminer les réels m et n tels que :
 $g(x) = m + \frac{n}{5x + 1}$
- Trouver les réels a, b, c et d tels que :
 $h(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{x - 3}$

Polynôme et Coefficients inconnus

1. Montrer que le polynôme f définie par :

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme g que l'on déterminera.

2. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ soit divisible par le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$

3. Détermine le polynôme f de degré 3 dans chaque cas :

- $f(x+1) - f(x) = -x^2 + 2x$ et $f(1) = 2$
- $f(1) = 4$; $f(-1) = 2$; $f(2) = 8$; $f(0) = -1$

2. Soit le polynôme P_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_k = (2k-1)x^3 - 3kx^2 + (1+k)x + 3k + 4$$

- Pour quelles valeurs de k , le polynôme P_k est-il de degré 2 ? le polynôme P_k est-il de degré 3 ?
- Déterminer la valeur de k pour laquelle P_k admet le réel 2 comme racine.
- Pour $k = -\frac{4}{3}$, montrer que 1 est un zéro de P_k .
 - Déterminer une factorisation de P .
 - En déduire tous les zéros du polynôme P_k pour $k = -\frac{4}{3}$.
- Pour quelle valeur de k , le polynôme admet le réel 20 comme zéro.

Polynôme & Approfondissement

1. Soit f un polynôme du second degré et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Le sommet S de cette parabole est $S(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ et cette parabole passe par le point $A(0; 4)$. Donner la formule explicite du polynôme f sous la forme développée.

2. Soit le polynôme P définie par :

$$P(x) = 6x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 4x + a$$

- Déterminer le réel a pour que P admette 1 comme zéro.
- En déduire le polynôme Q tel que : $P(x) = (x-1) \times Q(x)$.

3. Dans la suite, on prendra $a = 16$.

- Déterminer les réels α ; β et μ tels que : $P(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \mu) \times f(x)$.
- Factoriser P en produit de facteurs de 1^{er} degré.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $P(x) \leq 0$.

2. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Soit f un polynôme de degré 3 tel que :

$$f(x) - f(x-1) = x^2 \text{ et } f(0) = 3$$

- Déterminer le polynôme f .
- Montrer que : $S_n = f(n) - f(0)$ et en déduire que : $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Soit à calculer la somme

$$S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3.$$

- Déterminer le polynôme P de degré 4 tels que : $P(x) - P(x-1) = x^3$ et $P(0) = 2$.
- Montrer que $S_k = P(k) - P(0)$ et en déduire que : $S_k = \frac{[k(k+1)]^2}{4}$.
- Calculer S_{11} et S_{2021} .

4. Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Soit la fonction rationnelle Q définie par : $Q(x) = \frac{1}{x^2+x}$

- Déterminer D_Q puis trouver les réels a et b tels que : $Q(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
- Soit la somme $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$
 - Montrer que : $S_n = Q(1) + Q(2) + Q(3) + \dots + Q(n)$ et en déduire que : $S_n = \frac{n}{n+1}$.
 - Calculer S_{2024} .

5. Soit le polynôme F défini par :

$F(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ et t une racine réelle de F . (F est un polynôme symétrique)

- Déterminer $F(-1)$ et $F(1)$.
- Montrons que $\frac{1}{t}$ est aussi une racine de F .
- Démontrer que : $2t^2 - 5t + 3 - \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2} = 0$.
- On note $u = (t + \frac{1}{t})$. Démontrer que : $2u^2 - 5u - 1 = 0$
- En déduire toutes les racines t de F .

6. Soit le polynôme P définie par :

$$P(x) = 2x^6 - 28x^4 + 98x^2 - 72$$

- Déterminer les réels a ; b et c tels que : $P(x) = (x-2)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$
- Déterminer les réels x_1 ; x_2 et x_3 tels que : $P(x) = 2(x^2 - x_1)(x^2 - x_2)(x^2 - x_3)$
- En déduire une factorisation de P en produit de facteurs premiers.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Tant que le grand dédaignera de dévoiler le futur à l'homme, l'humanité se résumerait à deux mots : "Attende et Espère".