

FICHE N°1 : Fonctions numériques

Situation 1 :

1) Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x - 2}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{\sqrt{x+4} - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} + x^2 - 7}{x - 2}$$

2) Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 - 3x + 7); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x + 3); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x - 4}{x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 7x + 13}{3x^2 - 12}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 5x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8}{x^2 - 4x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{2}{x - 3}$$

3) Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 - 5x + 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x + \sqrt{3x^2 + x + 1}); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

4) Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \tan 3x}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan 3x}{x + \sin 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x}{6x + \pi}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2 \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + 1}$$

Situation 2 :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x; & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}}; & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montre que pour tout $x > 0$: $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

2) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Situation 3 :

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $[0; +\infty[$

1) Montre que $\forall x > 1$; $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq g(x) \leq \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) Etudie la limite de g en $+\infty$.

Situation 4 :

Etudie la continuité des fonctions suivantes au point x_0 donné :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{5-\sqrt{x+17}}{x-8} \\ f(8) = -\frac{1}{10} \end{cases} x_0 = 8; \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-|x-1|-1}{x-1} \\ f(1) = 1 \end{cases} x_0 = 1; \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x+1}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} x_0 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{2x+2}{x+2} \text{ si } x > 1 \end{cases} x_0 = 1; \quad \begin{cases} \sqrt{1+x} \text{ si } x > -1 \\ \sqrt{1-x} \text{ si } x \leq -1 \end{cases} x_0 = -1$$

Situation 5 :

1) Dans chacun des suivants, détermine a pour que f soit continue en x_0

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-x}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = a \end{cases} x_0 = 0; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ f(1) = a \end{cases} x_0 = 1$$

2) Détermine la valeur de a et b pour que f soit continue au point x_0 donné :

$$a) \begin{cases} f(x) = ax + 2b \text{ si } x < 2 \\ f(x) = ax^2 + bx - 3 \text{ si } x \geq 2 \\ f(2) = 3 \end{cases} x_0 = 2; \quad b) \begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si } x \in]-\infty; 2] \\ f(x) = 2ax + b \text{ si } x \in]2; +\infty[\\ f(2) = -3 \end{cases} x_0 = 2$$

$$c) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3x+a}{2-x} \text{ ; si } x > 2 \\ f(x) = \frac{2x+b}{3} \text{ ; si } x \leq 2 \end{cases} ; x_0 = 2; \quad d) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1} \text{ ; si } x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} x_0 = 1;$$

$$3) \text{ Soit } a \text{ un réel donné, la fonction définie par : } f_a(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+ax+a}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ k \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

Quelles valeurs faut-il donner à a et k pour que f_a soit continue au point $x_0 = 2$?

Situation 6 :

$$\text{Soit la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{x+4} \text{ si } -4 < x \leq 4 \\ \frac{x-\sqrt{5x-4}}{x-4} \text{ si } x > 4 \end{cases}$$

- 1) Détermine le domaine de définition de f .
- 2) Etudie la continuité de f en 4.
- 3) Etudie la continuité de f sur $] -4; 4]$ et $]4; +\infty[$.

Situation 7 :

$$\text{Soit la fonction } f: x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$$

- 1) Calcule la limite de la fonction f en 1.
- 2) Dédus-en une fonction g , prolongement par continuité de f en 1.

Situation 8 :

1) Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes au point x_0 donnée :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x+1} \\ f(-1) = 5 \end{cases} x_0 = -1; b) \begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} x_0 = 0; c) \begin{cases} f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x+1} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases} x_0 = 0$$

2) Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable au point x_0 donné :

$$a) \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases} x_0 = 1; b) \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases} x_0 = -2$$

Situation 9 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par : } f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 4x + m}{4 - x^2} \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} \text{ si } 1 < x < 2 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \text{ où } m \text{ est réel.}$$

1) a) Précise le domaine de définition de f .

b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 2.

2) a) Détermine la valeur du réel m pour que f soit prolongeable par continuité en -2 .

b) Dédire $f(-2)$.

3) Pour la valeur trouvée de m , montre que f est continue 1 puis étudie la dérivabilité en 1.

Situation 10 :

On désigne par (C_f) sa courbe représentative graphique de f dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\text{Soit } k \text{ la fonction définie par } k(x) = \begin{cases} \frac{|x+3|-1}{x^2+x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x^2 + mx & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

1) Détermine le domaine de définition de k .

2) Calcule les limites de k en $-\infty$. puis interprète graphiquement le résultat.

3) Calcule les limites de k en $-\infty$. Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) .

4) Etudie la continuité de k en -2 .

5) Détermine m pour que k soit continue en -1 .

Situation 11 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x - 2}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x^2 + x + 3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative graphique de f dans le plan muni repère

orthonormé $(\mathbf{o}; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) .

2) a) Etudie la continuité de f en 2.

b) Etudie $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Situation 12 :

Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensembles de définition.

$$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3; \quad b) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1; \quad c) f(x) = (-x^2 + 2x)^3;$$

$$d) f(x) = \cos^2(x) \sin(x); \quad e) f(x) = x - 2 + \sqrt{2-x}; \quad g) f(x) = \frac{x-2}{x^2-1};$$

$$h) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}; \quad i) f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}; \quad j) f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1};$$

$$k) f(x) = (x-1)\sqrt{x^3-x^2}; \quad l) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; \quad m) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{2x-3}$$

$$n) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{2x-3}; \quad o) f(x) = (x^2-5)\sqrt{3x^2-5x+2}; \quad p) f(x) = \frac{4}{x} - \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x+3}$$

$$q) f(x) = \sin(3x-2) + \cos(\sqrt{-2x+5}); \quad r) f(x) = \cos(5x+3); \quad s) f(x) = \sin(3x-1)^4$$

Situation 13 :

Pour chacune des suivants détermine l'ensemble de définition puis les variations sur leurs ensemble de définitions

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2+x|} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - \sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2}{1-x^2} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ x - \sqrt{x^2+4} & \text{si }]0; +\infty[\end{cases}$$

Situation 14 :

Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f(1) = f(3) = 0; f(2) = -1; f(0) = 1; f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0; \text{ et } \forall x \in]0; 2[, f'(x) < 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) (C_f) représente la courbe de f , précise les équations des asymptotes à (C_f) .

3) Précise le signe de f suivant les valeurs de x .

Problème 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x-3}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative graphique de f dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
- 2) a) Détermine les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) .
c) Etudie la position relative entre (C_f) et (D) .
- 3) A est le point d'intersection des asymptotes à (C_f) .
a) Détermine les coordonnées du point A.
b) Montre que le point A est un centre de symétrie de (C_f) .
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.
- 5) Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec les axe du repères.
- 6) Trace $(D), (T)$ et (C_f) .

Problème 2

Partie A :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-5x+13}{x-1}$

Et (C_f) sa courbe représentative graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) a) Détermine les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est asymptote à (C_f) .
c) Etudie la position relative entre (C_f) et (D) .
- 3) Montre que le point I, intersection des asymptotes à (C_f) , est centre de symétrie à (C_f) .
- 4) Calcule $f'(x)$ sur D_f puis dresse le tableau de variations de f
- 5) Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec les axe du repères.
- 6) Trace $(D), (T)$ et (C_f) .

Partie B :

On définit la fonction g par : $f(x) = \frac{x^2-5|x|+13}{|x|-1}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_g de g .
- 2) Montre que $\forall x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, on a $f(x) = g(x)$.

3) Déduis-en une construction de (C_g) .

Problème 3 :

Soit la fonction numérique f à variation réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative graphique de f dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
- 2) Précise la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
- 3) Etudie les variations de f .
- 4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente à pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
- 5) Trace la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 6) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
- 7) a) Calcule $(g^{-1})'(\frac{5}{2})$.
b) Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa représentative dans le même repère que celle de f .

Problème 4 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{|x| - 1}$$

Soit (c_f) la représentation graphique de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 3) Calcule les limites de f aux bornes de D_f . Précise les asymptotes à la courbe (c_f) de f .
- 4) a) Etudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation géométrique du résultat.
b) Dresse le tableau de variation de f .
c) Trace (c_f) et ses asymptotes.
- 5) a) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]-1; 1[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J de $\mathbb{R}$    préciser.
b) Calcule $g(0); g(\frac{1}{2}); (g^{-1})(\frac{3}{2})$ où g^{-1} désigne la bijection réciproque de g .