

Fiche2 sur les fonctions numériques

Lycée Privé Askia Douso LPAD

Année scolaire 2024 – 2025

Classe : 11^{ème} Sc

Prof : DIAKITE

Exercice1 :

A. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f . **(0,25pt)**
2. f est-elle continue en 0 ? et en 1 ? On se justifiera. **(0,75pt)**
3. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? si oui précise son prolongement h en 1. **(0,75pt)**

B. On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$.

1. Détermine le domaine de définition de g . **(0,5pt)**
2. Montre que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par P . **(0,75pt)**
3. Montre que P est dérivable en 2 puis donne l'équation de la tangente à la courbe (C) de P au point d'abscisse 2. **(1pt)**

Exercice2 :

Après l'apparition d'une maladie virale, les responsables de la santé publique ont estimé que le nombre de personnes frappées par la maladie au jour t à partir du jour d'apparition du premier cas est $M(t) = 45t^2 - t^3$ pour $t \in [0, 25]$.

La vitesse de propagation de la maladie est assimilée à la dérivée du nombre de personnes malades en fonction de t .

1. Calcule $M'(t)$.
2. En déduis la vitesse de propagation le cinquième jour.
3. Détermine le jour où la vitesse de propagation est maximale et calcule cette vitesse.
4. Détermine les jours où la vitesse de propagation est supérieure à 600 personnes par jour.

Problème1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x^2-3x}{x-2}$$

1. Détermine le domaine de définition de f .
2. Détermine trois nombres a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
3. Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de f . Déduis-en les équations des asymptotes.
4. Calcule $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f .
5. Étudie le signe de $f'(x)$. Déduis-en le sens de variations de f .
6. Construis la courbe de f dans un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.

Problème2

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Détermine les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
Quelle est la conséquence graphique ?

2. a) Montre que $f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$
 b) Détermine les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. En déduis le signe de $f'(x)$.
 c) Dresse le tableau de variation de la fonction f .
 On donnera la valeur des extremums à 10^{-2} près.
3. a) Détermine l'équation de la tangente (T) à C_f en $x = 1$.
 b) La tangente (T) coupe la courbe C_f en un autre point I. Détermine les coordonnées du point I.
4. Trace la courbe C_f ainsi que la tangente (T) sur le même repère. On fera figurer les extremums de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.
5. Détermine suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Problème3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$. On désigne par (C_f) la représentation graphique de la fonction f définie $(o; \vec{i}; \vec{j})$ par : $f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x-3}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de $f(x)$
2. Détermine les limites aux bornes de son ensemble de définition
3. Donne la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ puis étudie le signe de $f'(x)$
4. Donne les variations de la fonction $f(x)$ sur D_f puis dresse son tableau de variations
5. Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 5$
6. Démontre que l'expression de $f(x)$ peut se mettre sous la forme : $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-3}$
7. Justifie que la courbe (C_f) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
8. Étudie la position relative de $(D): y = 2x - 1$ par rapport à la courbe (C_f) .
9. Construis la courbe et ces asymptotes dans le même repère.

Problème4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Exprime $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue ».
2. Étudie la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; (C_f) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
3. Étudie les variations de f .
4. Démontre que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont des asymptotes à (C_f) .
5. Trace (C_f) et démontre qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.

Problème5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$ et (C_f) sa courbe représentation dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calcule les limites aux bornes du domaine de définition.
 b) Montre que f est impaire puis donner une interprétation graphique.
 c) Détermine les réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \frac{\beta x}{x^2+3}$.
- 2) a) Calcule $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x^2+15)(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$.

- b) Donne le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . Dresse le tableau de variation de f après avoir calculé les limites aux bornes de D_f .
- 3) a) Montre que la droite $(D): y = -x$ est asymptote à (C_f) .
b) Etudie la position relative de (C_f) par rapport à (D) .
- 4) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $x = 0$.
b) Etudie la position relative de (C_f) par rapport à (T) .
- 5) a) Détermine les coordonnées des points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
b) Construis (D) ; (T) et (C_f) .

Problème6

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations. On y précisera les limites.
b) En déduis qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Justifie que $2,1 < \alpha < 2,11$.
2. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$.
a) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $f'(x) = g(x) \times h(x)$ où h est une fonction à préciser.
b) En déduis les variations de f .
c) Etudie les limites de f aux bornes de D_f .
d) Dresse le tableau de variations de f .
1. a) Détermine trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + \frac{bx+c}{x^2-1}$.
b) En déduis que (C_f) admet en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation.
c) Etudie la position de (C_f) par rapport à (Δ) .
2. Montre que $f(\alpha) = 3\alpha$.
3. a) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -\infty, -1[$ une solution unique β .
Détermine un encadrement de β d'amplitude $0,1$.
b) Déduis de ce qui précède le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Trace (C_f) , (Δ) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé d'unité 1 cm.
b) Etudie la position relative de (C_f) par rapport à (T) .
- 6) a) Détermine les coordonnées des points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
b) Construis (D) ; (T) et (C_f) .

Problème7

Soit f la fonction définie par son tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b et c sont des réels.

1. Complète le tableau ci-dessus.

- Détermine l'ensemble de définition de f puis les limites de f aux bornes de D_f .
- Calcule $f'(x)$.
- Détermine les réels a ; b ; et c en utilisant les données du tableau de f .
- Montre que la restriction g de f à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
- Montre que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près (on précisera la méthode).
- Donne une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Problème8

- Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = 1 - 2 \cos x$.
Détermine le signe de g sur $[0, \pi]$.
- Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+\cos 3x}{\cos^3 x}$.
 - Détermine l'ensemble de définition de f .
 - Montre qu'on peut réduire l'étude de f à $D_f \cap [0, \pi]$.
 - Dresse le tableau de variation de f .
 - Construis la courbe (C) de f après avoir précisé les points d'intersection avec l'axe (Ox) .

Problème9

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$.

- Donne l'écriture de $f(x)$ sans la valeur absolue.
 - Etudie les limites de f aux bornes des intervalles de D_f .
- Exprime $f'(x)$ et étudie le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles de D_f .
 - Dresse le tableau de variations de f .
- Vérifie que les droites d'équations $y = x + 1$ et $y = -x - 1$ sont asymptotes obliques à (C_f) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$. Etudie la position de (C_f) par rapport à ses asymptotes.
 - Trouve une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 0. Etudie la position de (C_f) par rapport à (T) .
 - Trace (C_f) , ses asymptotes et la tangente (T) .
- Montre que sur $] -1, 1[$, (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont on déterminera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

Problème10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et (C_f) sa courbe représentative

- Etudie les variations de f .
- Montre que (C_f) admet un point d'inflexion Ω dont on précisera les coordonnées.
- Etudie les branches infinies de (C_f) .
- Montre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.
- Montre que f réalise une bijection de l'ensemble J que l'on déterminera.
Donne le domaine de définition de f^{-1} bijection réciproque de f .
- Détermine $f^{-1}(x)$.
- Soit $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} .

Construis dans un même repère les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

Problème11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ et (C_f) sa courbe représentative

- Détermine Df ; Justifie que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- a) Démontre que : $\forall x \in Df$, on a $f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{(1 - \cos x)^2}$.
b) Dresse le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi]$.
c) Vérifie que sur cet intervalle (C_f) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature.
- a) Trace (C_f) et précise les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI)
b) Détermine une équation des tangentes aux points d'abscisses $-\pi$ et π .

Problème12

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
b) Etudie les variations de la fonction f et dresse son tableau de variations.
- a) Démontre que la courbe (Γ) admet une asymptote oblique (D) dont on déterminera l'équation puis étudie sa position relative par rapport à (Γ) .
b) Trace la courbe (Γ) et l'asymptote (D) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
- a) Démontre que la restriction h de la fonction f sur l'intervalle $J =]2, +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} d'un intervalle K dont on déterminera vers J .
b) Calcule $h^{-1}(\frac{5}{2})$ puis $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$ et dresse le tableau de variations de h^{-1} .
c) Trace (Γ') la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Problème13

Partie A :

Soit p le polynôme défini par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $p(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 7)$.
- Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique : 2cm).

- a. Détermine le domaine de définition de f puis les limites aux bornes de D_f .
b. Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{p(x)}{(x-1)^3}$.
- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.
- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur D_f et vérifie que $2,1 < \alpha < 2,2$.
- Démontre que la courbe (C_f) admet deux asymptotes dont l'une (D) est oblique son équation est à déterminer.
- Etudie la position relative de (C_f) et (Δ) d'équation $y = x$.

6. Trace (C_f) ; (D) et (Δ) dans le repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.
7. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $J =]1 , +\infty[$.
8. a. Montre que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Détermine $D_{g^{-1}}$.
 b. Dresse le tableau de variation de g^{-1} .
 c. Trace la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Problème14

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
2. Précise la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
3. Etudie les variations de f .
4. Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
5. Trace la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
6. Montre que la restriction h de f à l'intervalle $I =]1 , 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
7. a. Calcule $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$.
 a. Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que f .

Problème15

Le plan est muni du repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$. On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

1. Détermine les réels a et b pour que la courbe représentative (C) de f soit tangente au point d'abscisse 0 à la droite d'équation $y = 4x + 3$.
2. Pour les valeurs de a et b , trouvées à la première question, démontre que, pour tout nombre réel x , $f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2+1}$.
3. Etudie le sens de variation de f .
4. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .
5. En déduis que (C) possède une asymptote (Δ) dont on donnera l'équation et sa position relative par rapport à la courbe (C) .
6. Dresse le tableau de variation de f .
7. Démontre que le point $\Omega(0 ; 3)$ est un centre de symétrie de (C) .
8. Trace (C) , (Δ) et sa tangente au point Ω .
9. En déduis la courbe (C') de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$.
10. Détermine, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des racines de l'équation $f(x) = m$.