



FICHE n°5 : LIMITES-CONTINUITE ET DERIVATION

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x + 3$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x-1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 3}$; e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 3}{x-1}$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calcule les limites de la f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$; b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
 c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x$; d) $f(x) = -2x - x^2 + 1$
 e) $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$; f) $f(x) = (-2x^3 - 3x)(x+1)$
 g) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$; h) $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{2x-6}$
 i) $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$; j) $f(x) = \frac{(x-2)^4}{x-3}$
 k) $f(x) = \frac{2x+7}{x^2-1}$; l) $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x - 1}$

Exercice 3

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x+5}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x+3}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x-1}$

Exercice 4

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2-x}{x-3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{x^2-1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{(x+1)^2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x}{x^2 - 2x + 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-5x}{x-3}$

Exercice 5

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x^2 + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 1} - 3x$;
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-x} - \sqrt{1-x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x + \sqrt{x+2}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^3 + 1}$

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5+2x}}{x-2}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{3x+1} - 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5x}}$

Exercice 7

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$
 g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$; h) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$; f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$

Exercice 8

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^3 + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + 1}$

Exercice 9

Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} & \text{et } x_0 = 2 \end{cases}$
 2) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{-9} & \text{si } x \neq 9 \\ f(9) = \frac{1}{6} & \text{et } x_0 = 9 \end{cases}$
 3) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x-2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{2} & \text{et } x_0 = 1 \end{cases}$
 4) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2-x}-2}{\sqrt{x+3}-1} & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = -\frac{1}{2} & \text{et } x_0 = -2 \end{cases}$

Exercice 10

1) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} & \text{si } x \in]1; 3] \end{cases}$

Etudie la continuité de f en 1.

2) $\begin{cases} f(x) = 1 - x & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Etudie la continuité de f en 2.

Exercice 11

Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue.

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{x+2a}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$;
 2) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + ax + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$;
 3) $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+1}{4x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f et détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; b) \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \\ x_0 = 2 \end{cases} ; \\ c) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \\ x_0 = 3 \end{cases} ; d) \begin{cases} f(x) = \frac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1} \\ x_0 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) f admet-elle un prolongement par continuité au point 4 ?
Si oui, donne alors ce prolongement.

Exercice 14

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de f en x_0 indiqué, puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= 3x^2 + x - 5, x_0 = 0 \\ b) f(x) &= \frac{x-1}{x+2}, x_0 = 3 \\ c) f(x) &= (1+x)\sqrt{x+1} - 1, x_0 = -1 \\ d) f(x) &= \frac{x}{1+\sqrt{x}}, x_0 = 0 \end{aligned}$$

Exercice 15

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = -x^2 + x \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x^2 - x \end{cases}$$

Etudie la dérivabilité de f en 1.

Exercice 16

Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}, x_0 = 1 \\ b) \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}, x_0 = -2 \end{aligned}$$

Exercice 17

Détermine la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivant :

$$\begin{aligned} a) f(x) &= 2x + 3 ; b) f(x) = 1 - 2x \\ c) f(t) &= -7t + 2 ; d) f(x) = x^2 - 3x + 1 \\ e) f(y) &= -5y^2 + 2y - 3 ; f) f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x \\ g) f(t) &= -t^4 - 5t^3 - t^2 + 7 ; h) f(x) = \sin(2x + 1) \\ i) f(x) &= \sqrt{x} + 4 - \frac{1}{x^3} ; j) f(x) = x^3 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} - 3 \\ k) f(x) &= \sin x ; l) f(x) = \cos(3x) \\ m) f(x) &= \tan x ; n) f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Exercice 18

Détermine la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivant :

$$\begin{aligned} a) f(x) &= (2x + 3)(3x - 7) ; b) f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x - \sqrt{x}) \\ c) f(x) &= (x^2 - 3x + 1)(x - 1) ; d) f(x) = x^3(1 - x) \end{aligned}$$

Exercice 19

Détermine la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivant :

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \frac{2x+3}{3x-1} ; b) f(x) = \frac{2x+5}{x^2-1} ; c) f(x) = \frac{x}{1-x} \\ d) f(x) &= \frac{1}{4x^2-1} ; e) f(x) = \frac{3}{2x-5} ; f) f(x) = \frac{x+3}{1-2x} \\ g) f(x) &= \frac{x^2+x+1}{2-x} ; h) f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x-3} \\ i) f(x) &= \frac{x^2+4x-4}{x^2-2x+2} ; j) f(x) = \frac{x^2+7}{x^2-x-6} \\ k) f(x) &= 2x + 1 + \frac{3}{x-2} ; l) f(x) = 3x + 2 - \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Exercice 20

Détermine la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivant :

$$\begin{aligned} a) f(x) &= (x+3)^2 ; b) f(x) = (1-x)^3 ; c) f(x) = \sin^3 x \\ d) f(x) &= (x^3-4)^4 ; e) f(x) = (x^2-3x+1)^3 \\ f) f(x) &= \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2 ; g) f(x) = (x^2-x+1)(x-2)^4 \end{aligned}$$

Exercice 21

Détermine la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivant :

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \sqrt{2x+3} ; b) f(x) = \sqrt{x+1} ; c) f(x) = \sqrt{2-x} \\ d) f(x) &= (2x+3)\sqrt{3x-5} ; e) f(x) = \sqrt{3x^2+2x-3} \\ f) f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x ; g) f(t) = \sqrt{x^2-x^3} \end{aligned}$$

Exercice 22

Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{x^2-2x+1}{x-5} \text{ et } x_0 = 1 \\ 2) f(x) &= \frac{2x+1}{x-2} \text{ et } x_0 = 0 \\ 3) f(x) &= \cos x \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{3} \\ 4) f(x) &= \frac{x^3+1}{x^3-1} \text{ et } x_0 = -1 \\ 5) f(x) &= x^2 - 3x \text{ et } x_0 = 4 \\ 6) f(x) &= \sqrt{x+1} \text{ et } x_0 = 3 \end{aligned}$$