

Fiche sur les fonctions numériques

Lycée du complexe scolaire Samdech HUN SEN

Année scolaire 2024 - 2025

Classe : 11^{ème} Sc

Prof : DIAKITE

Exercice1 :

I. Calcule les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x - 12}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{2 - \sqrt{x^2 - x + 2}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}{x^2 - 6x + 9}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{-2x^2 + x + 3}{-2x^2 + 5x - 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - \sqrt{14 + x}}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+2} - \sqrt{11x-6}}{x+1 - \sqrt{x+3}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{x^2 - 16}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

II. Calcule les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\tan 5x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \sin x}{x^2 - \sin^2 x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{\cos(2x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x - 4 \cos x + 3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

Exercice2 :

Calcule les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 7}{2x^2 - 6}; f(x) = \frac{2x - 7}{3x^2 - 3x + 1}; f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{-3x + 4}; f(x) = \frac{x^2 + 2}{|-2x + 3|};$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}.$$

Exercice3 :

Détermine les limites de f aux bornes de D_f dans les cas suivants :

$$a. f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5} \quad b. f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} \quad c. f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1} \quad d. f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$e. f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Exercice4 :

$$1. \text{ Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ Etudie la continuité en 0 de la fonction } f.$$

$$2. \text{ Soit } g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ La fonction } g \text{ est-elle continue en } x_0 = 1.$$

3. Soit $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{-x^2 + 6x - 8} & \text{si } x < 2 \\ -\frac{3}{2} + \frac{x-2}{x+1-\sqrt{x^2+x+3}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Etudie la continuité de h en 2.

Exercice 5 :

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} & , \text{ si } x \neq 2 \\ m & , \text{ si } x = 2 \end{cases}$.

Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue au point $x = 2$?

Exercice 6 :

Etudie la dérivabilité de f au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ et $x_0 = 1$
2. $f(x) = \frac{-2x+8}{x-2}$ et $x_0 = 3$
3. $f(x) = |x-2| + \frac{2}{x+1}$ et $x_0 = 2$
4. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ et $x_0 = 1$

Exercice 7 :

On admet que dans chacun des cas suivants, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule la fonction dérivée de f .

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$; $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$; $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$;

$f(x) = \sin(2x) + \cos^2(5x)$; $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3}$; $f(x) = \cos^3 x$; $f(x) = \left(\frac{x+1}{1+x^2}\right)^2$;
 $f(x) = (3x-1)(1-2x)^3$.

Exercice 8 :

A. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f . (0,25pt)
2. f est-elle continue en 0 ? et en 1 ? On se justifiera. (0,75pt)
3. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? si oui précise son prolongement h en 1. (0,75pt)

B. On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$.

1. Détermine le domaine de définition de g . (0,5pt)
2. Montre que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par P . (0,75pt)
3. Montre que P est dérivable en 2 puis donne l'équation de la tangente à la courbe (C) de P au point d'abscisse 2. (1pt)

Exercice 9 :

Après l'apparition d'une maladie virale, les responsables de la sante publique ont estimé que le nombre de personnes frappées par la maladie au jour t à partir du jour d'apparition du premier cas est $M(t) = 45t^2 - t^3$ pour $t \in [0, 25]$.

La vitesse de propagation de la maladie est assimilée à la dérivée du nombre de personnes malades en fonction de t .

1. Calcule $M'(t)$.
2. En déduis la vitesse de propagation le cinquième jour.
3. Détermine le jour où la vitesse de propagation est maximale et calcule cette vitesse.
4. Détermine les jours où la vitesse de propagation est supérieure à 600 personnes par jour.

4. Trace (C_f) , (Δ) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé d'unité 1 cm.
- b) Etudie la position relative de (C_f) par rapport à (T) .
- 6) a) Détermine les coordonnées des points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
- b) Construis (D) , (T) et (C_f) .

Problème 7

Soit f la fonction définie par son tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0		
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a , b et c sont des réels.

1. Complète le tableau ci-dessus.
2. Détermine l'ensemble de définition de f puis les limites de f aux bornes de D_f .
3. Calcule $f'(x)$.
4. Détermine les réels a , b et c en utilisant les données du tableau de f .
5. Montre que la restriction g de f à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
7. Montre que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près (on précisera la méthode).
8. Donne une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Problème 8

1. Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = 1 - 2 \cos x$.
Détermine le signe de g sur $[0, \pi]$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$.
 - a. Détermine l'ensemble de définition de f .
 - b. Montre qu'on peut réduire l'étude de f à $D_f \cap [0, \pi]$.
 - c. Dresse le tableau de variation de f .
 - d. Construis la courbe (C) de f après avoir précisé les points d'intersection avec l'axe (Ox) .

Problème 9

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$.

1. a) Donne l'écriture de $f(x)$ sans la valeur absolue.
- b) Etudie les limites de f aux bornes des intervalles de D_f .
2. a) Exprime $f'(x)$ et étudie le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles de D_f .
- b) Dresse le tableau de variations de f .

3. a) Vérifie que les droites d'équations $y = x + 1$ et $y = -x - 1$ sont asymptotes obliques à (C_f) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$. Etudie la position de (C_f) par rapport à ses asymptotes.
- b) Trouve une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 0. Etudie la position de (C_f) par rapport à (T) .
- c) Trace (C_f) , ses asymptotes et la tangente (T) .
4. Montre que sur $] -1, 1[$, (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont on déterminera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

Problème 10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et (C_f) sa courbe représentative

1. Etudie les variations de f .
2. Montre que (C_f) admet un point d'inflexion Ω dont on précisera les coordonnées.
3. Etudie les branches infinies de (C_f) .
4. Montre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.
5. Montre que f réalise une bijection de l'ensemble J que l'on déterminera.
Donne le domaine de définition de f^{-1} bijection réciproque de f .
6. Détermine $f^{-1}(x)$.
7. Soit $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} .

Construis dans un même repère les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

Problème 11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ et (C_f) sa courbe représentative

1. Détermine Df ; Justifie que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. a) Démontre que : $\forall x \in Df$, on a $f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{(1 - \cos x)^2}$.
- b) Dresse le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi]$.
- c) Vérifie que sur cet intervalle (C_f) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature.
3. a) Trace (C_f) et précise les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI) .
- b) Détermine une équation des tangentes aux points d'abscisses $-\pi$ et π .

Problème 12

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
- b) Etudie les variations de la fonction f et dresse son tableau de variations.
2. a) Démontre que la courbe (Γ) admet une asymptote oblique (D) dont on déterminera l'équation puis étudie sa position relative par rapport à (Γ) .
- b) Trace la courbe (Γ) et l'asymptote (D) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
3. a) Démontre que la restriction h de la fonction f sur l'intervalle $J =]2, +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} d'un intervalle K dont on déterminera vers J .

- b) Calcule $h^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$ puis $(h^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$ et dresse le tableau de variations de h^{-1} .
 c) Trace (Γ') la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Problème 13

Partie A :

Soit p le polynôme défini par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} : p(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 7)$.
2. Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2cm).

1. a. Détermine le domaine de définition de f puis les limites aux bornes de D_f .
 b. Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{p(x)}{(x-1)^3}$.
2. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur D_f et vérifie que $2,1 < \alpha < 2,2$.
4. Démontre que la courbe (C_f) admet deux asymptotes dont l'une (D) est oblique son équation est à déterminer.
5. Etudie la position relative de (C_f) et (Δ) d'équation $y = x$.
6. Trace $(C_f); (D)$ et (Δ) dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
7. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.
8. a. Montre que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Détermine $D_{g^{-1}}$.
 b. Dresse le tableau de variation de g^{-1} .
 c. Trace la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

Problème 14

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
2. Précise la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
3. Etudie les variations de f .
4. Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
5. Trace la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
6. Montre que la restriction h de f à l'intervalle $I =]1, 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
7. a. Calcule $(h^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$.
 b. Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que f .