

TD SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES 11^{ème} SCIENCE 2024-2025	
LYCEE PRIVE LA FRATRIE DE DJIDJAN – KENIEBA (L. FRATRIE)	
PROF : SEKOU SACKO	TEL : 97-96-29-97/ 92-01-75-99

Exercice1 : Calcule les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll}
1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} ; & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{2x^2-3x-2} ; & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2} \\
2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3} ; & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} ; & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \\
3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} - x ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1} ; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} \\
4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3x-\pi} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x - \sin 2x}{5x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\
5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{11x-6}}{x+1-\sqrt{x+3}} ; & \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{2\cos^2 x + 7\cos x + 3}{2\cos x + 1} ; & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{2-\sqrt{x^2-x+2}}
\end{array}$$

Exercice 2 : 1) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3+3x^2-3x-2}{3x^2+3x-6} \\ f(-2) = -1; f(1) = 0 \end{cases}$ f est-elle continue en -2 et 1

2) Etudie la continuité de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x-7}{1-x} \\ f(1) = 12 \end{cases}$ en 1

3) Soit f la fonction par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \\ f(3) = m \end{cases}$; trouver la valeur de m pour que f soit continue en 3

4) Précise le D_f puis vérifie si f est prolongeable par continuité en x_0 dans les cas suivants :

$$a) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2} \quad x_0 = 2 \quad b) f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad x_0 = 0$$

5) Utilise le théorème des gendarmes pour calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1}; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+\sin x}{x-1}$$

6) Dans chacun des cas suivants détermine D_f , calcule les limites aux bornes de D_f puis étudie les branches à l'infini

$$a) f(x) = \frac{7-3x}{x^2-x-6}; \quad f(x) = \frac{x^2+x-5}{x+2}; \quad f(x) = \frac{x^2-3x+7}{x^2+x+3}$$

7) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{(x-1)(x-2)}$. Détermine les réels a et b pour que f admet un prolongement par continuité en 1 et 2

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; i; j)$

1) Etudie la limite de f à $\pm\infty$. La courbe (C_f) admet-elle une asymptote horizontale

- 2) Démontre la droite $(\Delta): y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$
- 3) Soit la fonction g définie par $g(x) = ax + b - \sqrt{x^2 + 1}$
 - a) Étudie les limites de g en $-\infty$ (on discutera suivant les valeurs de a)
 - b) Détermine les valeurs de a et b pour que la $(D): y = 2x + 2$ soit une asymptote à la courbe de g en $-\infty$

Exercice 4 : Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable en x_0 dans les cas suivants :

- a)
$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

2) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x > -1 \end{cases}$. Détermine la valeur de a pour que f soit continue en -1 . Pour cette valeur étudie la dérivabilité de f en -1

3) On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3} & \text{si } x \neq 3 \text{ et } x \neq -3 \\ f(x) = 6 & \text{si } x = 3 \text{ et } x = -3 \end{cases}$

a) Détermine D_f

b) f est-elle continue en 3 et -3 ? justifie ta réponse.

4) On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \in]-\infty; 2] \\ f(x) = 2ax + b & \text{si } x \in]2; +\infty[\text{ et } f(2) = -3 \end{cases}$

Détermine les réels a et b pour que f soit continue en 2

4) Soit la fonction définie par $\begin{cases} x \in]-\infty; 1] & f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} \\ x \in]1; +\infty[& f(x) = \frac{x^2-ax+3}{x^2+bx-b-1} \\ & f(1) = c \end{cases}$. Détermine a ; b ; et c pour que f soit continue en 1

Exercice 5 : Soit la fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; ou a ; b et c sont des réels.

- 1) Calcule $f'(x)$
- 2) Détermine les réels a , b et c sachant que f admet 1 pour extrémum en $x = 0$ et -3 pour extrémum en $x = 2$
- 3) Étudie la fonction puis trace sa courbe

Exercice 6 : Soit f la fonction dont le tableau de variation est la suivante :

X	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

La fonction est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

- 1) Calcule $f'(x)$; puis trouver les valeurs des réels a, b et c en utilisant les données tableau.
- 2) Montre que la droite $(D): y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de f . puis étudier la position de C_f par rapport à (D)
- 3) Donner le signe de $f(x) \forall x \in D_f$
- 4) Trace la courbe de f dans un repère

Exercice 6 : Soit la fonction définis par $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$

- 1) Détermine les réels a, b, c et d tels que :
 - La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$
 - La courbe C_f passe par le point $A\left(\frac{1}{-2}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5
- 2) Etudie la fonction f

Exercice 7 : Soit la fonction définis par $f(x) = \frac{x^3+ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$. et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (o, i, j)

- 1) Détermine les réels a, b, c, m, n et p tels que :
 - La courbe (C_f) admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$
 - La courbe (C_f) passe par le point $A\left(\frac{0}{3}\right)$ et admet à ce point une tangente de coefficient directeur -3
- 2) Etudie la fonction f puis tracer sa courbe

Exercice 8 : Soit $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$ et (C_f) sa courbe representative dans un repère orthonormé (o, i, j)

- 1) Etudie les variations de f
- 2) Précise les asymptotes à la courbe (C_f)

- 3) Soit (Δ) l'asymptote non parallèle aux axes des coordonnées, étudie la position relative entre (Δ) et (C_f)
- 4) Trace la courbe de f

Exercice 9 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+4}{-x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) Étudie les variations de la fonction f
- 2) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) en 0
- 3) Trace la courbe (C_f)

Exercice 10 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$ et (C_f) sa courbe

- 1) Détermine les réels a, b, c tels que la courbe (C_f) passe par le point $A\left(\frac{0}{-6}\right)$ et $B\left(\frac{2}{4}\right)$ puis admet au point B une tangente de coefficient directeur -3
- 2) Étudie les variations de la fonction f
- 3) Montre qu'il existe des réels α, β ; et γ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$. En déduis que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ)
- 4) Montre que le point I intersection des asymptotes est centre de symétrie à (C_f)
- 5) Donner une équation de la tangente à (C_f) en 2
- 6) Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe
- 7) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réels m l'existence et les signes des racines de l'équation $x^2 - (3+m)x + m + 6 = 0$

Exercice 11 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Détermine D_f puis calcule les limites aux bornes de D_f
- 2) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 3$
 - a) Détermine les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
 - b) Montre que la droite $(D): y = x - 3$ est asymptote à (C_f)
 - c) Étudie la position relative de (C_f) par rapport à (D)
- 3) Calcule $f'(x)$ et en déduis les variations de f
- 4) Montre le point $I(-2; -5)$ est centre de symétrie de (C_f)
- 5) Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) en $x_0 = 1$
- 6) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère
- 7) Construis la courbe (C_f) et ses asymptotes

Exercice 12 : Soit la fonction numérique f à variable réels réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

- 1) Montre que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations
- 2) Précise la position de (C) par rapport à son asymptote oblique
- 3) Montre que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de la courbe

- 4) Etudie les variations de f
- 5) Existe-t-il des points de la courbe ou la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? si oui trouves les équations de ces tangentes en ce points
- 6) Trace la courbe (C) et ses asymptotes
- 7) Montre que la restriction g de $]1; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera
- 8) Calcule $(g^{-1})'(\frac{5}{2})$
- 9) Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa courbe représentative

Exercice 12 :

Partie A : On considère le polynôme P définis par $P(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 9$

- 1) Calcule $P'(1)$ et $P(3)$
- 2) Détermine les réels a et b tels que $P(x) = (x - 1)(3 - x)(ax^2 + b)$
- 3) Etudie le signe $P(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition et calcule les limites aux bornes
- 2) Montre qu'il existe trois réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$
- 3) Montre que la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est une asymptote a la courbe (C). Précise l'autre asymptote.
- 4) Démontre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^4}$
- 5) En déduis les variations de f
- 6) Soit g la restriction de f sur $]-\infty; 1]$
 - a) Montre que g réalise une bijection de $]-\infty; 1]$ vers k que l'on précisera
 - b) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g . Calcule si possible $(g^{-1})'(-3)$
 - c) Donne le tableau de variation de g^{-1}
- 7) Construis la courbe (C) puis la courbe C^{-1} de g^{-1} dans le même repère

Exercice 13 : Soit f la fonction définis par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Détermine D_f
- 2) Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue
- 3) Calcule les limites de f aux bornes du D_f
- 4) Etudie la continuité de f en 1 et 5. Interprète graphiquement les résultats
- 5) Démontre que la droite d'équation est axe de symétrie pour la courbe (C_f)
- 6) Démontre que les droites d'équation $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont des asymptotes a la courbe (C_f)
- 7) Détermine les coordonnées des points A et B, l'intersection de la courbe avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3
- 8) Trace la courbe et ses asymptotes

Exercice 14 : Une entreprise produit un certain nombre de crayons de couleur par jour où :

(x est exprimé en millier). Lors que la quantité x est comprise entre 3 et 10 on admet que le cout de production journalier exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$.

L'entreprise vend chaque millier de crayon à 99 euros.

- 1) En supposant que toute la production du jour est vendue, détermine la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$
- 2) Montre que le bénéfice $B(x)$, exprimé en euro est donnée par
$$B(x) = -x^3 + 147x - 600 \text{ avec } x \in [3; 10]$$
- 3) Etudier les variations de $B(x)$
- 4) En déduire le nombre de millier de crayon produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice un maximale. Quelle est alors ce bénéfice maximal

Exercice 15 : Soit (C) la courbe représentative dans le repère orthonormé de la fonction f définie par $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^2 x$

- 1) Montre qu'on peut restreindre l'étude de f à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 2) Montre que $f'(x) = \cos x \cos 2x$
- 3) En déduis les variations de f
- 4) Tracer la courbe représentative de f