

Étude complète d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 - 1}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $g(x) = x^3 - 3x + 8$

- Étudier le sens de variation de la fonction g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution notée α .
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2. Variations de f

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Déterminer les limites de f en -1 et en 1 et préciser les asymptotes.
- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
- En déduire les variations de f (dresser le tableau de variation).

3. Asymptote oblique.

- Montrer qu'il existe des réels a , b et c tels que $f(x) = ax + \frac{bx + c}{x^2 - 1}$.
- En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$.
- Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.
Vérifier que $\mathcal{C}_f$ rencontre $\mathcal{D}$ en un unique point A .

4. Tangentes

- Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Montrer que les abscisses des points B et B' de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à $\mathcal{D}$ sont $4 + \sqrt{15}$ et $4 - \sqrt{15}$.

5. Calcul de $f(\alpha)$

Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

6. Graphe

Tracer $\mathcal{D}$, les asymptotes verticales, la tangente T et $\mathcal{C}_f$.

Étude complète d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 - 1}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $g(x) = x^3 - 3x + 8$

- Étudier le sens de variation de la fonction g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution notée α .
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2. Variations de f

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Déterminer les limites de f en -1 et en 1 et préciser les asymptotes.
- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
- En déduire les variations de f (dresser le tableau de variation).

3. Asymptote oblique.

- Montrer qu'il existe des réels a , b et c tels que $f(x) = ax + \frac{bx + c}{x^2 - 1}$.
- En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$.
- Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.
Vérifier que $\mathcal{C}_f$ rencontre $\mathcal{D}$ en un unique point A .

4. Tangentes

- Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Montrer que les abscisses des points B et B' de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à $\mathcal{D}$ sont $4 + \sqrt{15}$ et $4 - \sqrt{15}$.

5. Calcul de $f(\alpha)$

Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

6. Graphe

Tracer $\mathcal{D}$, les asymptotes verticales, la tangente T et $\mathcal{C}_f$.