

Série N° 06

Limites & Comportement Asymptotique

Limites à l'infini

Exercice N° 01: Déterminer les limites des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-2x}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 + 3x^3 - 2)$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 1)$ | 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4x-3)^2}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-4x^2 + 3x}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 3}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x-3}$ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{4-3x}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 8}}{2x-1}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4x - 4}}{4x-5}$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 7}}{x^2 + x - 5}$ | 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x^3 - 2x - 3}}{4x-5}$ | 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$ |
| 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 5x + 17} - 2x$ | 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{3x^2 + x + 9}$ | 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{16x^3 + x + 1} - 4x$ |

Asymptôtes et Branches Infinies :

Exercice N° 02: Calculer les limites aux bornes de D_f des fonctions suivantes et les interpréter graphiquement

- | | | |
|---|--|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$ | 2) $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{x-2}$ | 3) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+3}$ |
| 4) $f(x) = \frac{2x+x^2}{x^3-x}$ | 5) $f(x) = \left \frac{x+1}{x^2-2} \right $ | 6) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{1-x}}$ |
| 7) $f(x) = \frac{-x^2+7x-8}{2(x-1)}$ (Montrer que la droite $\Delta : y = \frac{-1}{2}x + 3$ asymptote oblique a la courbe $\mathcal{C}$) | | |

Exercice N° 03: On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Déterminer le domaine de définition D_f . Etudier la parité de f et déduire le domaine d'étude D_e
- Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0
- a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{x}$
 b) En déduire que la droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$
 c) Etudier la position de $\mathcal{C}$ et Δ
- Etudier la limite de f en $-\infty$ et interpréter le résultat

Exercice N° 04: Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^3 + 9x - 10}{x^2 + x - 6}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe

- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f . Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
 b) Calculer la limite de f en -3 et interpréter le résultat
- Déterminer quatre réels : a, b, c et d pour lesquels f s'écrit sous la forme de : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+x-6}$
- Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et définir sa fonction prolongée.
- a) Montrer que la droite $\Delta : y = 1 - x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ aux voisinage de $\pm\infty$
 b) Déterminer les coordonnées de points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ .
 Etudier les positions de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à Δ

Exercice N° 05: Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f . En déduire que f est une fonction paire
- 2) a) Montrer que $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$. En déduire la limite de f en 0. Que peut-on déduire ?
b) En utilisant la parité de f , montrer que f est bornée

3) On définit la fonction g sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ g(x) = f(x) - 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Etudier la continuité de g en 0. Déterminer le domaine de continuité de la fonction g
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et l'interpréter graphiquement.

Exercice N° 06: Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{|x-1|-1}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2) a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2.
b) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter les résultats.
c) Montrer que $\Delta_1 : y = -x + 3$ et $\Delta_2 : y = x - 1$ sont des asymptotes obliques à la courbe $\mathcal{C}_f$.

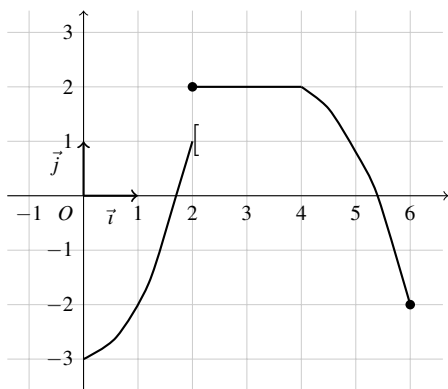
3) Soit la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x > 2 \\ g(x) = \frac{ax+b+E(x)}{x-1} & \text{si } 1 < x < 2 \\ g(2) = 1 & \text{et} & g(1) = 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour g soit continue en 1 et 2.

Exercice N° 07: Ci-contre, la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0, 6]$:

- 1) Déterminer graphiquement :
a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
b) Les intervalles sur lesquels f est continue
c) $f([0, 2[)$, $f([2, 4])$
- 2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $-2 < f(x) < 2$.



3) Soit

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{10x^2-6x+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ g(x) = \frac{2x^2-13x+6}{x^2-5x-6} & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

- a) Montrer que g est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]6, +\infty[$
- b) Montrer que $\forall x < 0$ on a $g(x) = \frac{10x-6}{\sqrt{10x^2-6x+1}+1}$. Etudier alors la continuité de g en 0 et en 6.
- c) Montrer que g est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice N° 08: ci - contre la courbe $\mathcal{C}_f$

- 1) Déterminer graphiquement :
 $\blacksquare D_f$ $\blacksquare D_c$ $\blacksquare D_{\sqrt{f}}$ $\blacksquare D_{\frac{1}{f}}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

- 2) Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
Peut-on prolonger par continuité en 3 ?

- 3) Déterminer $f([-\infty, 0])$ et $f([-1, 3])$

- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[-1, 0[$ une solution unique α_n .

