

FICHE D'EXERCICES SUR LES POLYNOMES 11^{ème} sciences 2019-2020 :

Exercice1 :

- 1) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme P défini par $p(x) = 8x^3 + ax^2 + bx - 30$ admette -5 et -2 pour racines. (on pourra exprimer $P(-2)$ et $P(-5)$ en fonction de a et b).
- 2) Montrer qu'alors $P(x)$ peut se factoriser par $x^2 + 7x + 10$.
- 3) Déterminer toutes les racines de. En déduire la forme totalement factorisée de P .

Exercice 2 :

On considère la fonction polynôme Q définie par : $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

On note α ; β et γ ses racines (si elles existent).

- 1) Ecrire en fonction de α ; β et γ la forme (totalement) factorisée de Q .
- 2) Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 5$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ et $\alpha\beta\gamma = -1$.
- 3) Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\beta = -1$; calculer γ .

Exercice 3 :

- 1) Trouver le nombre réel k tel que 3 soit un zéro de la fonction polynôme P défini par :

$$P(t) = t^3 - 6t^2 + (2 + 3k)t - 2k$$

Trouver tous les zéros de P .

- 2) Soient f et g deux fonctions polynômes définies par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = (x - 1)^2.$$

Trouver les réels a ; b ; c ; d tel que $\forall x \neq 1$; $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

Exercice 4 :

Montrer que la fonction polynôme f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16 \text{ est le carré d'une fonction polynôme } g \text{ que l'on déterminera.}$$

Exercice 5 :

Soit le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouver les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

Exercice 6 :

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- 1) Calculer $P(2)$
- 2) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 7 :

Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Trouver les réels a , b , c , d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$

Exercice 8 :

Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$. Montrer qu'il existe trois réels a ; b ; c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

Exercice 9 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de $f(x)$ dans les cas suivants

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} ; g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 19x - 30} ; h(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$$

Exercice 10 :

Quatre cubes ont respectivement pour arêtes, mesurés en centimètre x , $x + 1$, $x + 2$ et $x + 3$ ou x est un nombre entier naturel.

Déterminer x pour que le contenu des trois cubes d'arêtes x , $x + 1$, $x + 2$ remplisse exactement le cube d'arête $x + 3$.

Exercice 11 :

- I) Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
 - 1) Trouvez les réels a et b tel que pour tout réel x $f(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
 - 2) En déduire une factorisation de $f(x)$
- II) Déterminer le réel a pour que 2 soit une racine du polynôme $P(x) = 3x^2 - ax + 2a - 12$. Factorisez $P(x)$ et en déduire l'autre racine.

Exercice 12 :

- A. Trouve deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2 f(x) + (x - 1)^2 g(x) = 1.$$

- B) On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.

1. En admettant que a , b et c sont les zéros de P , donne la factorisation de $P(x)$. Précise l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines.
2. Donne alors la nouvelle écriture de $P(x)$, ordonnée selon les puissances décroissantes de x dont les coefficients dépendent de a , b et c .
3. Sans calculer les solutions a , b et c , détermine :
 $a + b + c$; $ab + ac + bc$ et abc .

4. Des résultats précédents, déduis le système suivant :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{29}{80} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- C) h est une fonction polynôme du second degré.

1. Détermine $h(t)$ sachant que $\forall t \in \mathbb{R} ; h(t + 1) - h(t) = t$.
2. Déduis en que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Déduit alors $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 10003$.