

Série d'exercices sur les fonctions polynômes :

Exercices 1 :

On considère les fonctions polynômes de la variable réelle t suivantes :

$P(t) = \frac{t^2 - t}{2}$; $Q(t) = \left(\frac{t^2 - t}{2}\right)\left(\frac{2t - 1}{3}\right)$ $R(t) = \left[\frac{t^2 - t}{2}\right]^2$. Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \quad ; \quad S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 \text{ et}$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3.$$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer en fonction de t chacune des expressions :

$$P(t+1) - P(t) ; \quad Q(t+1) - Q(t) ; \quad R(t+1) - R(t).$$

2) a) En déduire pour tout $k \in \{1; 2; 3; \dots; (n-1); n\}$ la valeur entière de $P(k+1) - P(k)$; $Q(k+1) - Q(k)$; $R(k+1) - R(k)$.

b) Des résultats précédents, déduire en fonction de n S_1 ; S_2 ; S_3 .

Exercice 2 :

Soient les fonctions f et g telles que :

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 9 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 2x - 8 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}.$$

1) Pour tout réel x non nul on a :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

2) Pour tout réel x non nul on pose :

$$v = x + \frac{3}{x}. \text{ Démontrer que si } x \text{ est solution de } g(x) = 0 \text{ alors } v \text{ est solution de l'équation} \\ (E) : v^2 + 2v - 14 = 0 \text{ avec } v \in \mathbb{R}.$$

3) a) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire une valeur exacte et une valeur approchée d'ordre 4 de chacune des solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3 :

On considère la fonction polynôme de la variable réelle t suivante :

$$h(t) = t^3 - 15t + 12.$$

1) En admettant que u , v et w sont les zéros de h , donner la factorisation de $h(t)$. Préciser l'ordre de multiplicité de chacun de ces zéros.

2) a) Donner alors la nouvelle écriture de $h(t)$, ordonner selon les puissances décroissantes de t dont les coefficients dépendent de u , v et w .

b) Par identification, dégager le système identifiant les valeurs constantes des coefficients de a) des puissances strictement inférieures à 3.

3) Des résultats précédents, déduire le système des égalités suivantes :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 30 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{5}{4} \end{cases}$$