

EXERCICES SUR LES FONCTIONS POLYNÔMES (11° S)

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le degré de f :

1°) $f(x) = (x^2 - 1)^5$; 2°) $f(x) = (x^3 + x + 1)(-5x^7 + 3x^2 - 4)$

3°) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^n (x^{2n} - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, mettre f sous forme canonique, déterminer les racines éventuelles de f puis étudier le signe de $f(x)$.

1°) $f(x) = 9x^2 + 6\sqrt{5}x + 5$; 2°) $f(x) = -2x^2 + x + 3$; 3°) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$.

Exercice 3 :

1°) Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui s'annule en -2 et 1 , qui prend la valeur 6 en 0.

2°) Déterminer la fonction polynôme f de degré 5 de coefficient dominant 12 et possédant 2 pour zéro triple et -1 pour zéro double.

3°) On considère les fonctions polynômes f et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + x + b.$$

a) Trouver les réels a et b pour que -2 et 3 soient des racines de f .

b) Factoriser $f(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

Exercice 4 : On considère les fonctions polynômes f et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - 5x^2 + ax + b \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - x - 2 = 0$.

2°) Déterminer les réels a et b pour que $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

3°) Déterminer tous les zéros de f et leur ordre de multiplicité.

Exercice 5 : On considère le polynôme $P(x)$ définie par : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 11x + 10$.

1°) Trouver une racine évidente de $P(x)$, en déduire une factorisation de $P(x)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations $P(x) \leq 0$ et $P(x) > 0$.

Exercice 6 :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1°) On considère la fonction rationnelle f définie par :

$$x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in Df : f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

2°) On considère la fonction rationnelle f définie : $g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x + 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Déterminer les nombres réels a ; b et c tels que : $\forall x \in Dg : g(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

Exercice 7 : On considère le polynôme $P(x)$ définie par : $P(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 10x + 12}{x^2 + x - 2}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de P .

2°) Simplifier $P(x)$ puis étudier son signe.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $P(x) < 0$.

Exercice 8 :

EXERCICES SUR LES FONCTIONS POLYNÔMES (11° S)

1°) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x , on ait :

$$a(x^2 + 9) + b(x^2 - 9) = 6^3.$$

2°) Déterminer les nombres réels c et d tels que, pour tout nombre réel x , on ait :

$$c(x + 3) + d(x - 3) = 12.$$

3°) On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{6^3}{x^4 - 81}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Dédire de la première question qu'il existe deux nombres réels α' et β' tels que, pour tout

élément x de D_f , on ait : $f(x) = \frac{\alpha'}{x^2 + 9} + \frac{\beta'}{x^2 - 9}$.

c) Démontrer qu'il existe trois nombres réels α , β et γ tels que, pour tout élément x de D_f , on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x + 3} + \frac{\beta}{x - 3} + \frac{\gamma}{x^2 + 9}.$$

Exercice 9 :

1°) Soit g et h deux fonctions polynômes définies par :

$$g(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = x - 2.$$

On désigne par f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ et par g' la fonction

polynôme définie par : $g'(x) = g(x) - g(2)$.

a) Effectuer la division euclidienne de g' par h .

b) En déduire l'existence de trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\text{Pour tout nombre réel } x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}.$$

2°) Etudier le signe de la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = -x + 4 + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{25}{2(x + 3)}.$$

Exercice 10 :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1°) On considère la fonction rationnelle f définie par : $x \mapsto \frac{1}{x(x^2 - 1)}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in D_f : f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}.$$

2°) On considère la fonction rationnelle f définie : $g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 10}{x - 4}$.

c) Déterminer l'ensemble de définition de g .

d) Trouver une fonction polynôme P de degré 2 et un nombre c tels que :

$$\forall x \in D_g : g(x) = P(x) + \frac{c}{x - 4}.$$