

Les fonctions polynômes

Situation 1

Dans chacun des cas suivants, trouve les nombres réels a, b et c pour que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soit égaux.

$$P(x) = 3x - 3; Q(x) = ax + b(2x + 1)$$

$$P(x) = 3x^2 - 7x + 2; Q(x) = a(x^2 - 3) + b(x - 1) + c$$

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8; Q(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \text{ et } Q(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$$

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 \text{ et } Q(x) = ax^5 + (b + c)x^4 + (c + d)x^3 + dx^2 + d$$

Situation 2

- 1) Détermine un polynôme de degré 2 divisible par $x - 2$ et $x + 1$ et dont le reste de la division par $x + 1$ soit égal à 5.
- 2) Détermine un polynôme de degré 3 divisible par $x + 2$ et $x - 1$ et dont le reste respectifs de la division par $x + 1$ et $x - 3$ sont 10 et 30.
- 3) Un polynôme divisé respectivement par $x - 1; x - 5$ et $x - 2$ donne pour reste Respectives 9 ; -39 et 3.

Quel reste donnera-t-il si on le divise par $(x - 1)(x - 5)(x - 2)$.

Solution 3

Soit $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Détermine a et b tels que $P(x)$ soit divisible par $x - 2$ et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$ est -12.

Situation 4

- 1) Factorise le trinôme $x^2 - 5x + 6$.
- 2) Détermine les réels a et b pour que le polynôme $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + ax + b$ soit divisible $x^2 - 5x + 6$.
- 3) Résous $P(x) \leq 0$.

Situation 5

Soit $P(x) = x^3 - 3x + 2$

- 1) Calcule $P(1)$.
- 2) Détermine les réels $a; b$ et c tels que : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
- 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$
b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Situation 6

Prouve que le polynôme : $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.

Situation 7

On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ avec $a \neq 0$

- 1) Montre que 0 n'est pas une racine de $P(x)$.
- 2) Montre que si α est une racine de $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.
- 3) Trouve une racine évidente de $P(x)$. Déduis-en une factorisation de $P(x)$.
- 4) Résous dans $\mathbb{R}$ $P(x) \geq 0$.

Situation 8

On considère le polynôme : $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$

- 1) Vérifions que 0 n'est pas une racine de $P(x)$.
- 2) a) Calcule $P(3)$
b) Détermine le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 3)Q(x)$.
c) Montre que $-\frac{1}{2}$ est une racine de $Q(x)$.
- 3) a) Montre que si α est une racine de $P(x)$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de $P(x)$.
b) Déduis-en les solutions de l'équation $P(x) = 0$.
c) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Situation 9

Soit le polynôme $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 14x^2 + 9x - 18$

- 1) a) Vérifie que 3 et -1 sont des racines de $P(x)$.
b) Factorise $P(x)$ en un produit de facteurs du premier degré.
c) Déduis-en les solutions de l'équation $P(x) = 0$
d) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \geq 0$.
- 2) Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{(x+1)(x^2-x-2)}$
a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
b) Simplifie $f(x)$; $\forall x \in D_f$
c) Détermine les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

Situation 10

- 1) On donne le polynôme p défini par $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$
a) Vérifie que 2 est un zéro du polynôme p .
b) Factorise $p(x)$.
c) Déduis-en les solutions de l'équation $P(x) = 0$
- 2) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{p(x)}{(3x-1)(x-2)}$
a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
b) Montrer que pour $x \in D_f$; $f(x) = \frac{-2x^2 - x + 6}{3x-1}$