EXERCICES

Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

a- la forme canonique de $p(x)$.
b- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$

1) $p(x) = x^2 + x - 1$; 2) $p(x) = -x^2 + x - 1$; 3) $p(x) = x^2 - 7x + 6$.

4) $p(x) = -5x^2 + x + 1$; 5) $p(x) = x^2 + 2x + 2$; 6) $p(x) = 4x^2 + 2x - 2$.

7) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$; 8) $p(x) = x^2 + x + 1$; 9) $p(x) = -5x^2 - 4x + 1$

2 Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

les réels a ; b ; c ; d etc.....

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ — $p(x) = ax^3 + bx^2\ cx + d$
2) $q(x) = 2x^3 - 12x - 9$ — $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ — $f(x) = (2ax + 1)(-bx - 1)(x + c)$
4) $g(x) = 2x^3 - 12x - 9$ — $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
5) $i(x) = x^2 + x - 1$. — $i(x) = (2x + a)(x - b)$
6) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$. — $k(x) = ax^2 + bx + c$
7) $l(x) = x^2 - 7x + 9$. — $l(x) = (\frac{-3a}{4}x - b)^2$

3 Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont rationnelles puis en déduire leur ensemble de définition :

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$; 2) $g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 7x + 9$; 3) $h(x) = (-x + 8)^3$

4) $p(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 5}$; 5) $q(x) = \left(\frac{7x + 1}{-x - 1}\right)^3$; 6) $k(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{-x + 3}}$;

7) $i(x) = \frac{x + 2}{(2x + 1)(x^2 - 1)}$

4
1) Trouver deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 f(x) + (x - 1)^2 g(x) = 1$
2) Soit la fonction polynôme P : $x \to 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Trouver deux nombres a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
En déduire une factorisation de P.

5
1) Développer $(x^2 + bx + c)^2$.
2) Montrer que $(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

6 Déterminer les réels m, n et p pour que : $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ soit factorisable par : $(x - 3)(x^2 - 1)$. Donner alors une factorisation.

7

Trouver le nombre réel k tel que la fonction polynôme suivante :
$P : x \to 4x^4 - 20x^3 + 53x^2 - 10kx + 7k$ soit le carré d'une fonction polynôme de degré 2.

8 Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

On suppose que $p(x)$ admet trois racines distinctes $x_1 ; x_2 ; et\ x_3$.

1) Calculer : $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ et $x_1x_2x_3$ sans calculer les racines.
2) En déduire alors la valeur de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$
3) Résoudre $p(x) = 0$. Vérifier les résultats obtenus au 1).

9 Soit $p(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1) Déterminer les trois réels a , b et c tel que :
$p(x) = a(2x - 5)^3 + b(2x - 5)^2 + c(2x - 5)$.
2) En déduire une factorisation de $p(x)$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme p(x) de degré 3 tel que :

1) $P(x)$ admet -1, 1 et 2 pour racines et $p(0) = 4$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x+1) - p(x) = x(x+1)$ et $p(1) = 0$.

11 Soit l'équation : $x^3 + 9x^2 + 51x + 155 = 0$.

Déterminer le réel h tel que, en posant $\mathbf{X} + h = x$, l'équation proposée s'écrive alors :

$\mathbf{X}^3 + p\,\mathbf{X} + q = \mathbf{0}$; où p et q sont des coefficients que l'on déterminera.

12 Dans chacun des cas suivants :

a- Déterminer l'ensemble de définition D_f.
b- Simplifier $f(x)$ sur D_f.
c- Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

1) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{(-x+1)(x+2)}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$

13 Soit les fonctions polynômes p et q définies par :
$P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24$ et
$q(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$

1) a- Montrer que 2 est un zéro triple de p, puis en déduire les autres zéros de p.
b- Résoudre l'inéquation : $x \in [-5\,;5\,]\,;\ P(x) \leq 0$.

2) Calculer q(2) et q(3) puis en déduire les zéros de q.

3) Soit la fraction rationnelle h : $x \longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$

a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.
b- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

14 Soit les fonctions polynômes f et g définies par :
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 6$ *et* $g(x) = x^2 - x - 2$

1) Déterminer les zéros de f.

2) Soit la fraction rationnelle h : $x \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$

c- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.
d- Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que : $\forall\ x \in D_h$ on a :

$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

e- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

15 Soit la fonction polynôme h définie par : $h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $h(x) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c)$.

3) Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{3x}{x^4-4}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de f.

b- Ecrire f sous forme $\frac{N(x)}{D(x)}$ où N et D sont deux polynômes.

c- Résoudre l'équation $f(x) = 0$

16 Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a- l'équation $f(x) = x$
   b- l'inéquation $f(x) \leq x$

16 Soit le polynôme $p(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

1) Trouver un polynôme q tel que $p(x) = [q(x)]^2$
2) Résoudre $p(x) = 0$.
3) a- Trouver les réels a, b et c tels que $x^3+6x^2+6x+5 = (x+5)(ax^2+bx+c)$.

   b- Simplifier la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5}$