



FICHE n°2 : FONCTIONS POLYNOMES

Exercice 1

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donne le degré et les coefficients.

- 1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$
- 2) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x - 1$
- 3) $f(x) = -x^5 + 4x^3 + 2x^2 - x - 4$
- 4) $f(x) = x^2 - 6x^3 - 1$
- 5) $f(x) = x^2 - x - 1$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, trouve les nombres réels a , b , et c pour que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

- $P(x) = 5x - 3$; $Q(x) = ax + b(2x + 1)$
 $P(x) = 3x^2 - 7x + 2$; $Q(x) = a(x^2 - 3) + b(x - 1) + c$
 $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$; $Q(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

Exercice 3

Développe, réduis puis ordonne suivant les puissances décroissantes de x , les polynômes suivants :

- 1) $f(x) = (x^2 + 5)^2 + (2x + 5)^2$
- 2) $f(x) = (x^2 + 1)^3 + (x^4 - 1)^3$
- 3) $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^3$
- 4) $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$
- 5) $f(x) = (x + 2)^4$

Exercice 4

Factorise si possible les polynômes suivants :

- a) $f(x) = 5x^2 - x - 4$ b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
c) $f(x) = 5x^2 - x + 1$ d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
e) $f(x) = x^2 - 2x$ f) $f(x) = x^2 - 1$
g) $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$ h) $f(x) = x^3 - 8$
i) $f(x) = 2x(x + 1) - (1 - x)$ j) $f(x) = x^3 + 1$
k) $f(x) = x(2 - x) + 4x - 8$ l) $f(x) = 12x - 3x^3$

Exercice 5

Trouve un polynôme $P(x)$ du second degré vérifiant les conditions suivantes : $P(0) = 1$; $P(-2) = 5$ et $P(2) = 5$.

Exercice 6

Prouve que la fonction polynôme f définie par :

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que tu détermineras.

Exercice 7

Soit $P(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

- 1) Détermine les réels a , b et c tels que :
 $P(x) = a(2x - 5)^3 + b(2x - 5)^2 + c(2x - 5)$.
- 2) En déduis une factorisation de $P(x)$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, détermine le polynôme $f(x)$ de degré 3 tel que :

- 1) $f(0) = 5$; $f(1) = 4$; $f(-1) = 10$ et $f(2) = 13$.
- 2) $f(-1) = f(1) = f(2) = 0$ et $f(0) = 4$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) - f(x) = x^2 + x$ et $f(1) = 0$.

Exercice 9

Effectue la division euclidienne de :

- 1) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ par $x - 1$
- 2) $-5x^2 + 2x + 7$ par $x + 1$
- 3) $3x^5 - 2x^3 + 4x + 1$ par $x^3 + 2x^2 - 1$
- 4) $x^3 - 7x - 6$ par $x + 1$
- 5) $x^4 + 4$ par $x^2 - 2x + 2$

Exercice 10

On définit les polynômes f et g tels que :

$f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouve les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

Exercice 11

On considère le polynôme $f(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.

Il a trois racines a , b et c , sans calculer ces racines. Détermine :
 $a + b + c$; abc ; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; $a^2 + b^2 + c^2$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Exercice 12

On considère le polynôme $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Il a trois racines a , b et c , sans calculer ces racines.

- 1) Calcule $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, puis calcule $a^2 + b^2 + c^2$.
- 2) Calcule $f(2)$ et détermine alors les trois zéros de f et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 13

Détermine la forme canonique de chacun des polynômes suivants :

- a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$ b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 6$
c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$
e) $f(x) = x^2 + 12x + 5$ f) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

Exercice 14

Etudie suivant les valeurs de x , le signe du polynôme $f(x)$ dans chaque cas :

- $f(x) = 2x - 4$; $f(x) = 1 - 3x$; $f(x) = -x + 1$
 $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$; $f(x) = x^2 + x - 6$
 $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$; $f(x) = x^2 - x + 3$
 $f(x) = \frac{x - 1}{x + 4}$; $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 6}$; $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x + 4}$

Exercice 15

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$.

- 1) Calcule $P(-1)$.
- 2) Détermine les réels a , b et c tels que :
 $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 16

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

- 1) Justifie que 1 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.
- 2) Détermine les réels a et b tels que :
 $P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$.

- 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
 b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 17

On considère le polynôme $P(x) = -2x^3 - x^2 + 22x - 24$.

- 1) Calcule $P(2)$ et $P(-4)$.
 2) En déduis une écriture de $P(x)$ sous forme d'un produit de trois polynômes du premier degré.
 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
 b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 18

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

- 1) Trouve les réels a et b tels que pour tout x ,
 $P(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.

- 2) En déduis la factorisation de $P(x)$.
 3) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 19

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6.$$

- 1) Quel est le degré de P .
 2) Montre que le réel -1 est un zéro de P .
 3) Détermine une fonction polynôme Q du troisième degré telle que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
 4) Vérifie que $Q(-1) = 0$ et détermine les racines de Q .
 5) En déduis une factorisation de P .

Exercice 20

Soit le polynôme $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6$.

- 1) Calcule $P(2)$ et $P(-4)$.
 2) Détermine une factorisation de $P(x)$.
 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
 b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) < 0$.

Exercice 21

Dans chacun des cas suivants, détermine les réels a et b .

- 1) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ et $f(x) = a + \frac{b}{x+3}$.
 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$ et $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
 3) $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$ et $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.
 4) $f(x) = \frac{x^3-5x}{x^2+3}$ et $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$.

Exercice 22

Dans chacun des cas suivants, détermine les réels a , b et c .

- 1) $f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x+3}$ et $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.
 2) $f(x) = \frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$ et $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.
 3) $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$ et $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

Exercice 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+4x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
 2) Détermine les réels a , b , c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}.$$

Exercice 24

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
 2) Détermine les réels a , b , c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}.$$

Exercice 25

Après avoir déterminer l'ensemble de définition, simplifie le polynôme $f(x)$ dans chaque cas :

- 1) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ 2) $f(x) = \frac{x^3 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}$
 3) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 6}$ 4) $f(x) = \frac{2x^3 - 15x^2 + 37x - 30}{x^2 + x - 12}$
 5) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$

Exercice 26

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]-2; +\infty[$

par les relations : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{3x-3}{2x+4}$.

- 1) a) Etablis l'égalité suivante : $f(x) - g(x) = \frac{-3x^3+5x^2-x-1}{(x^2+1)(2x+4)}$.
 b) Détermine les réels a , b et c tels que :

$$f(x) - g(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{(x^2+1)(2x+4)}.$$

 2) Détermine l'ensemble des solutions de l'équation :

$$f(x) - g(x).$$

 3) Dresse le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 12.$$

- 1) Résous $\mathbb{R}$ dans les équations suivantes :
 a) $x^2 - x - 12 = 0$
 b) $x^2 + 4x + 3 = 0$
 c) $x^2 + 4x - 4 = 0$.
 2) Détermine les réels a , b et c tels que :

$$f(x) = a(x^2 + 4x)^2 + b(x^2 + 4x) + c.$$

 3) En utilisant les résultats de la question 1)
 a) Factorise $f(x)$.
 b) En déduis la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 28

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

- 1) Calcule $P(1)$.
 2) Détermine les réels a et b tels que :

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b).$$

 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
 b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leq 0$.
 4) On donne $f(x) = \frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^2+2x-3}$.
 a) Détermine le domaine de définition de f .
 b) Factorise $x^2 + 2x - 3$, puis simplifie $f(x)$.
 c) Détermine les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.