

Exercices et Problèmes :
Chap. Trigonométrie

Exercice1 :

1. Sur le cercle trigonométrique, on considère les points A et B tels que :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{7\pi}{8} \text{ et } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{3\pi}{5}.$$

Détermine la mesure principale des angles suivants : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$; $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA})$; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

2. ABC est un triangle rectangle en A , direct tel que $BC = 2AC$.

a. Construis deux triangles équilatéraux directs ACD et ABE .

b. Donne une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CB})$

Exercice2 : Simplifie les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(x + \pi) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$$

$$B(x) = \tan(\pi + x) - \tan x$$

$$C(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) \times \sin(-x)$$

$$D = \sin(x - y) \times \cos(x + y) - \sin(x + y) \times \cos(x - y)$$

Exercice3 : Dans chacun des cas suivants, détermine une mesure en radian de α

$$1) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exercice4 : Soit x un nombre réel donné tel que : $\sin^2 x = \frac{3}{5}$.

1. a. Calcule $\sin x$; $\cos x$ et $\sin 2x$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

b. Calcule $\tan x$ et $\cos 2x$ si $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

2. On donne $\cos x = -\frac{3}{5}$; calcule $\sin \frac{x}{2}$ et $\cos \frac{x}{2}$ sachant que $x \in [0; \pi]$

3. On considère un nombre α tel que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$. Calcule $\sin \alpha$; $\cos \alpha$ et $\cos 2\alpha$

Exercice5 : Démontre les égalités suivantes

$$1) \tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \quad 2) \frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x \quad 3) \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$$

$$4) \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan y \quad 5) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - \sin^2 x \quad 6) \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$7) \frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad 8) \frac{2 + \sin 2x - 2 \cos 2x}{1 + 3 \sin^2 x - \cos 2x} = \frac{2}{5} \left(2 + \frac{1}{\tan x}\right)$$

Exercice6 :

1) Factorise $A = \sin 5x + \sin 3x$; $B = \sin x - \sin 5x$; $C = \cos 4x - \cos 6x$; $D = 1 + \sin x$

2) Transforme en somme a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times \cos\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$; b) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{9}\right) \times \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice7 :

1) Résous les équations suivantes :

$$a) \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \quad b) \cos(3x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$c) \cos x + \sin 2x = 0 \quad d) \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad e) |\sin 3x| = |\sin 2x| \quad f) \cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

$$g) x \in [-2\pi; 2\pi], \sin^2 2x - 4 \sin 2x + 3 = 0 \quad h) x \in [-\pi; \pi], 2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$i) -\cos x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{2} = 0 \quad j) 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$$

2) Après avoir vérifié que : $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = \sin 2x$, résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- i) $1 - \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x + \cos x = 0$
 ii) $1 + \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x + \cos x = 0$
 3. a. Développe $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$ et prouve l'identité : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4x)$
 b. En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{13}{16}$$

Exercice8 : Pour tout nombre réel x , on pose : $A(x) = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$.

1. Prouve que $A(x) = -\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$.
2. Mets $A(x)$ sous la forme $A(x) = a \cos(2x + b)$ où a et b sont des nombres réels à déterminer.
3. Résous dans $[-2\pi; 2\pi[$, l'équation $A(x) = 1$.

Exercice9 : Résous les inéquations lorsque $x \in [0; 2\pi]$:

a) $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan x \geq \sqrt{3}$ c) $\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ d) $2 \cos\left(2x + \frac{2x}{4}\right) \geq 1$.

Exercice10 : Résous dans $[0, 2\pi]$ le système $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Exercice11 :

1. Calcule la valeur exacte de :

$$D = \cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{7\pi}{18} + \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18} \quad E = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$2. \text{ Soit } A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \text{ et } B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}.$$

Calcule $A + B$ et $A - B$. En déduis A et B .

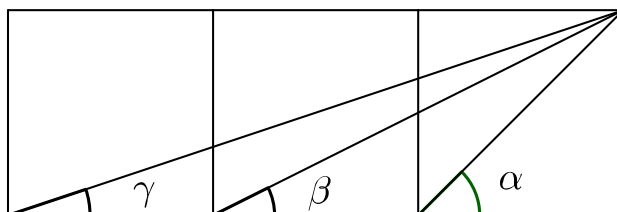
Exercice12 : ABC est un triangle équilatéral de centre S tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$. Détermine, en radian, la mesure principale de chacun des angles orientés ci-après :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}); (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}); (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA}); (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}).$$

Exercice13 : Soit A et B deux points du plan tels que : $AB = 4 \text{ cm}$

1. Construis le point C tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $AB = AC$.
2. Soit D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{17\pi}{3}$. Détermine la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ et construis D .
3. Construis le point E tel que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \frac{11\pi}{12}$ et $DE = 3 \text{ cm}$.
4. Démontre que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
5. Construis le point F tel que A, F et C soient alignés et $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}) = \frac{5\pi}{12}$.
6. Démontre que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Exercice14 : On considère trois carrés disposés comme dans la figure ci-dessous :



Calculer $\cos(\beta + \gamma)$. En déduis que $\alpha = \beta + \gamma$.

Exercice15 : θ désigne le nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\cos \theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

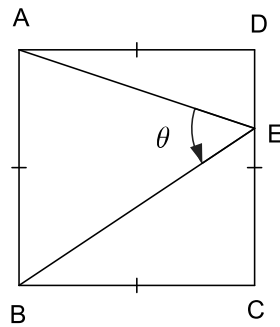
1. Calcule $\sin \theta$
2. Calcule $\cos 2\theta$
3. Déduis-en la valeur de θ .

Exercice16 : On pose pour tout nombre réel x , $A(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

1. Calcule $A\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $A\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ puis dans $] -\pi; \pi]$, l'équation $A(x) = 0$.
3. a. Démontre que pour tout nombre réel x , $A(x) = 3 - 4 \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$
b. Déduis-en la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice17 :

1. Démontre que si A, B et C désignent les mesures des angles d'un triangle alors :
a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;
b. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
2. $ABCD$ est un carré du plan tel que $2EC = 3DE$ et $\widehat{AEB} = \theta$. Calcule $\tan \theta$.



Problème1 :

1. a. Vérifie que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$
b. Résous dans $\mathbb{R}$, $2t^2 + (1 - \sqrt{2})t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
c. Déduis de la question (a.) la résolution de l'équation : $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
2. Résous dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$ l'inéquation suivante : $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$
3. Représente sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

Problème2 : On considère l'équation $(E) : 2t^2 - 5t + 2 = 0$.

1. a. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)
b. Vérifie que $2t^2 - 5t + 2 = 2(t - 2)\left(t - \frac{1}{2}\right)$
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$. On pourra utiliser la question 1) a).
3. En utilisant la question 1) b) résous dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$ les inéquations :

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 < 0 \text{ et } 2 \cos^2 2x - 5 \cos 2x + 2 < 0.$$

Problème3 : On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) : \left[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 2x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin 2x \right]^2 = 4$$

1. α est un nombre réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
- a. Vérifie que : $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$. Déduis-en la valeur exacte de $\sin \alpha$.
- b. Calcule $\cos 2\alpha$ et déduis la valeur de α .
2. a. Démontre que l'équation (E) est équivalente à :

$$\cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$

- b. Résous alors l'équation (E) et place les points images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
3. Résous dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$, l'inéquation : $\left[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 2x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin 2x \right]^2 \geq 4$