

Exercices d'entraînement N°1 : 11^{ème} Science 2017-2018

Trigonométrie : Série 1

Exercice n°1 :

1. Dans les cas suivants détermine la mesure principale α de x , place x sur le cercle trigonométrique et donne la valeur exacte de $\cos x$ et de $\sin x$.

$$x = -\frac{43\pi}{4}; \quad x = \frac{19\pi}{2}; \quad x = -\frac{58\pi}{3}; \quad x = -\frac{37\pi}{3}; \quad x = \frac{1047\pi}{2}; \quad x = -\frac{1005\pi}{2}$$

2. Calcule $\sin x$ et $\cos x$ pour :

$$x = \frac{3\pi}{4}; \quad x = -\frac{5\pi}{4}; \quad x = \frac{53\pi}{4}; \quad x = -\frac{37\pi}{3}; \quad x = \frac{34\pi}{3}; \quad x = -\frac{97\pi}{3}; \quad x = \frac{35\pi}{3}, \quad x = -\frac{11\pi}{4}$$

Exercice n°2 :

1. On donne $\sin x = \frac{1}{3}$; $x \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$.
- Pour tout réel x écris une relation entre $\sin x$ et $\cos x$.
 - Déduis-en la valeur exacte de $\cos x$.
 - Pour tout réel x établis une relation entre $\cos x$ et $\tan x$.
 - Déduis-en la valeur exacte de $\tan x$.
 - A l'aide d'une calculatrice, trouve une mesure de x en radian.
2. Pour $x \in \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$ tel que $\sin x = \frac{4}{5}$. Calcule $\cos x$ et $\tan x$.
3. Pour $\alpha \in]-\pi ; 0[$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$. Calcule $\sin x$ et $\tan x$.
4. Pour $x \in]-\pi ; 0[$ tel que $\tan x = 2$. Calcule $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice n°3 :

1. Calcule $\cos x$ et $\sin x$ dans les cas suivants :

a. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ et $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$.

b. $\cos 2x = \frac{7}{25}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right]$.

c. $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ et $x \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{2} \right]$.

2. Calcule $\cos 2x$ et $\sin 2x$ dans les cas suivants :

a. $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$.

34 32 34 / 66 34 32 34

b. $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $x \in \left[\pi ; \frac{3\pi}{2} \right]$.

c. $\tan x = -3$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0 \right]$

Exercice 4 :

Déterminer l'angle α en radians, dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 1^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; & 2^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} ; & 3^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} ; & 4^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
 5^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; & 6^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; & 7^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} ; & 8^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
 9^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases} ; & 10^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} ; & 11^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} ; & 12^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\
 13^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} ; & 14^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; & 15^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases} ; & 16^\circ) & \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice n°5 :

A. Démontre les égalités suivantes pour tout réel x :

1°) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \cos x \sin x$ 2°) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \cos x \sin x$.

3°) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$; 4°) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$

5°) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ 5°) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x$;

**« La réussite est proportionnelle au
courage et inversement
proportionnelle au carré de la**

34 32 34 / 66 34 32 34

$$6^\circ) \sin^4 x - \cos^4 x = 1 - \cos^2 x; \quad 7^\circ) (\cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

$$8^\circ) \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x$$

B. Démonstre les égalités suivantes :

$$1. \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) + 2 \cos x + \cos(\pi + x) - \sin(\pi + x) = 0$$

$$2. \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{15}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) = 0.$$

$$3. \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = 0.$$

C. Simplifie les expressions suivantes :

$$A(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) - \sin(\pi + x)$$

$$B(x) = \cos x + \cos(-x) - \sin(-x) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C(x) = \cos(-x) + \cos(5\pi - x) - \sin(-x) + \sin(-5\pi - x) + \cos(4\pi - x)$$

$$D(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + 5\pi) + \cos(\pi - x) - \cos(1000\pi - x) + \sin(101\pi - x)$$

$$D(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} - \tan\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}$$

Exercice n°6 :

1. a) Démonstre que

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

b) Calcule $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

2. a) Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Donne la bonne réponse si fausse.

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b$$

1. Calcule $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

2. Calcule $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

3. Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \sin(x-y)\cos(x+y) - \sin(x+y)\cos(x-y)$$

34 32 34 / 66 34 32 34

$$B = \sin(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).$$

4. Démontre que :

a. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ et $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

b. Déduis en que : $\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$.

Exercice n°7 :

1. Démontre que :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} ; \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

2. Utilise les résultats ci-dessus pour montrer les égalités suivantes

a.
$$\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} ;$$

b.
$$\sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x ;$$

c.
$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Exercice n°8 :

1. On pose :

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} ; \quad B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

Calcule $A+B$ et $A-B$. Déduis en A et B .

2. Transforme en produit :

$$\sin 2x + \sin 6x ; \cos 5x - \cos 4x ; \sin x + \sin 2x + \sin 3x ; \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

3. Transforme en somme ou une différence.

$$2 \cos x \cos 4x ; \quad \sin(x+y) \cos(x-y) ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

4. Démontre les égalités suivantes

a)
$$\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$$

b)
$$\frac{\sin 3x + \sin 7x}{\cos 3x - \cos 7x} = \cotan 2x$$

c)
$$\frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan y ;$$

d)
$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$$

Exercice n°9 : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation :

**« La réussite est proportionnelle au
courage et inversement
proportionnelle au carré de la**

34 32 34 / 66 34 32 34

- 1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $3 - 4 \cos^2 2x = 0$; 3) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$.
6) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$;
8) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $x \in [-2\pi; 3\pi]$; 9) $\sin\left(5x - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;
10) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 3x = 0$; 11) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x$;
12) $\tan x = 1$; 13) $\tan x = -1$; 14) $\tan x = \sqrt{3}$; $3 \tan^2 x - 1 = 0$
15) $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 16) $\sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3}{4} = 0$
17) Vérifie que : $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ puis résous
 $-4 \sin^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\cos(x) + 4 - \sqrt{3} = 0$

Exercice n°10 :

1. Résous dans $\mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = -1$; $\cos x + \sin x - 3 = 0$; $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$.
 $3 \cos 5x - 4 \sin 5x = 3$; $\cos 2x - \sin 2x - 3 = 0$
2. Après avoir vérifié que : $\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1$ résous les équations suivantes :
 $1 - \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x + \sin x = 0$; $1 + \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x + \sin x = 0$

Exercice n°11 :

Soient x , y et z les mesures des trois angles d'un triangle.

Démontrer les égalités suivantes :

- a. $\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$
b. $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$
c. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$

Exercice n°12 :

Soient x et y deux nombre réels de l'intervalle $[0; \pi]$. On considère le système d'équation (S) :

34 32 34 / 66 34 32 34

$$\begin{cases} \cos x \times \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \times \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$

1. Démontre que le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2. Résous le système (S).

Exercice n°13 :

1. x étant un nombre réels, démontre que :

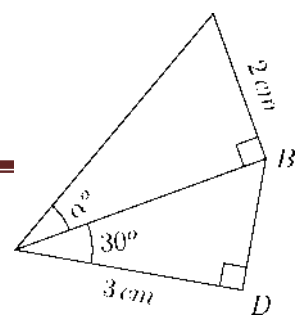
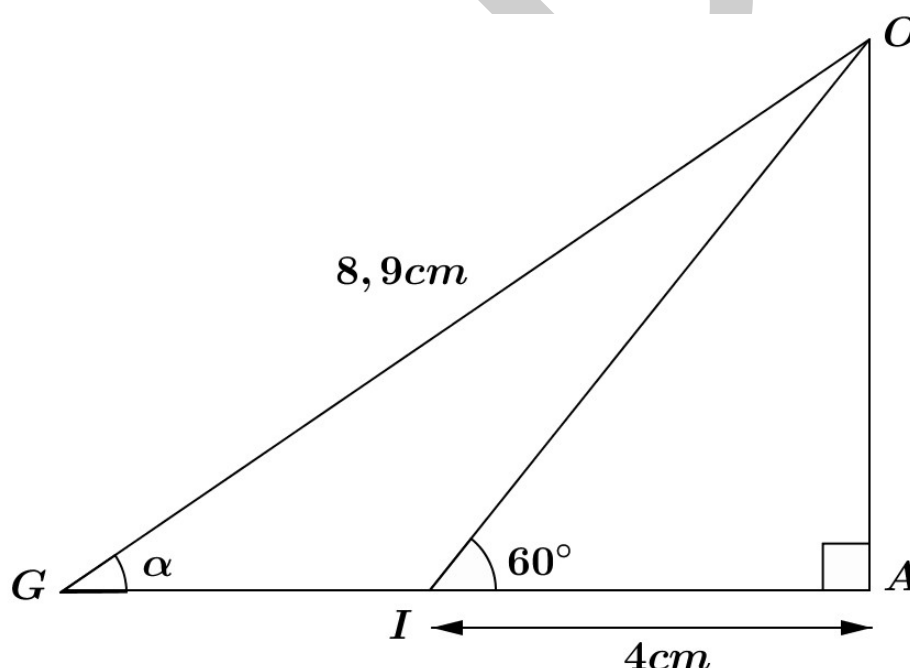
$$\cos 5x = \cos x (16 \cos^4 x - 20 \cos^2 x + 5) \quad \text{et} \\ (1 - \cos x)(4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 1 - \cos 5x.$$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 5x = 1$

3. Déduis en les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$; $\cos \frac{4\pi}{5}$; $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice n°14 :

On considère le triangle GAO ci-dessous :

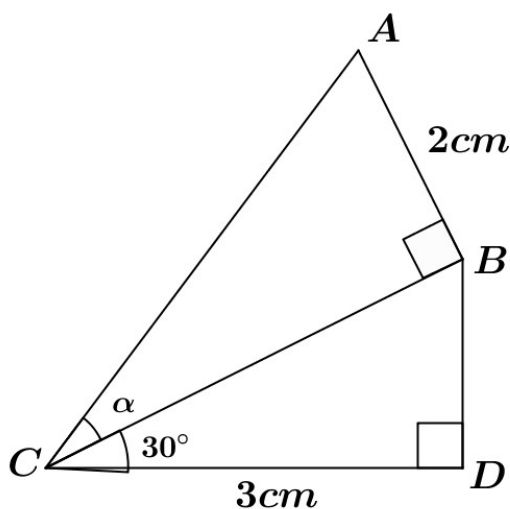


« La réussite est proportionnelle au courage et inversement proportionnelle au carré de la

34 32 34 / 66 34 32 34

- a) Calcule la longueur AO . (1,5 pts)
- b) Déduis en la mesure de l'angle α . (1,5 pts)
- c) Calcule les périmètres des triangles IAO et GAO . (1,5 pts)

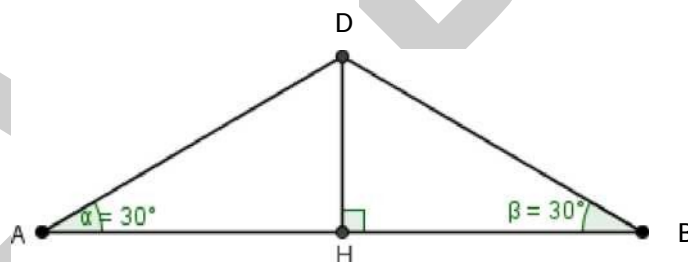
Exercice n°15:



- a) Calcule la longueur BC .
- b) Déduis en la mesure de l'angle α .
- c) Calcule les périmètres de ABC et BDC .

Exercice n°16:

Soit ABD un triangle isocèle de base AB . Calculer les longueurs AD et DH sachant que $AB = 5$ cm.



Exercice n°17:

Séko Boiré se trouvant en un point **S** veut rejoindre **Méssitan** à sa fenêtre en un point **M**.

Pour cela, il place une échelle de **S** à **M** contre le mur ; on assimile le pied du mur en un point **H**.

Le mur et le sol sont perpendiculaires.

On donne $HS = 3$ m ; $MH = 4$ m.

- a) Faire une figure soignée pour illustrer cette situation.

**« La réussite est proportionnelle au
courage et inversement
proportionnelle au carré de la**

34 32 34 / 66 34 32 34

- b) Calculer SM
- c) Calculer $\cos \widehat{M}$.
- d) À l'aide d'une calculatrice donner la valeur de l'angle $\widehat{M}$.

ASD