EXERCICES D'ENTRAINEMENT: 11ème Sciences 2019-2020

Trigonométrie :

Exercice n°1 :

1. Dans les cas suivants détermine la mesure principale α de x, place x sur le cercle trigonométrique et donne la valeur exacte de $cos\, x$ et de $\sin x$.

$$x = -\frac{43\pi}{4};\ x = \frac{19\pi}{2};\ x = -\frac{58\pi}{3};\ x = -\frac{37\pi}{3};\ x = \frac{1047\pi}{2};\ x = -\frac{1005\pi}{2}$$

2. Calcule $\sin x$ et $\cos x$ pour :

$$x = \frac{3\pi}{4};\ x = -\frac{5\pi}{4};\ x = \frac{53\pi}{4};\ x = -\frac{37\pi}{3};\ x = \frac{34\pi}{3};\ x = -\frac{97\pi}{3};\ x = \frac{35\pi}{3},$$
$$x = -\frac{11\pi}{4}$$

Exercice n°2 :

1. Démontre que :

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \times \cos\frac{x}{2}\ ; \qquad \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \quad et \quad \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2}$$

2. Utilise les résultats ci-dessus pour montrer les égalités suivantes

a. $\dfrac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x-\sin x} = -\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$;

b. $\sin^4 x = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$;

c. $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x.$

1°) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$ **2°)** $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x.$

3°) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$; **4°)** $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\cos x \sin x$

5°) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ **5°)** $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice n°3 :

A. Démontre les égalités suivantes :

1. $\cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) + 2\cos x + \cos(\pi + x) - \sin(\pi + x) = 0$
2. $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{3\pi}{15}) - \sin(\frac{2\pi}{10}) = 0.$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = 0.$

B. Simplifie les expressions suivantes :

$$A(x) = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) - \sin(\pi + x)$$
$$B(x) = \cos x + \cos(-x) - \sin(-x) + \sin(-\frac{\pi}{2} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

Exercice n°4 :

1. On pose :

$$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}\ ;\quad B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

Calcule $A+B$ et $A-B$. Déduis en A et B.

2. Transforme en produit :

$\sin 2x+\sin 6x$; $\cos 5x-\cos 4x$; $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$; $\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

3. Transforme en somme ou une différence.

$2\cos x\cos 4x$; $\sin(x+y)\cos(x-y)$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$

4. Démontre les égalités suivantes

$a)\ \frac{\sin x+\sin 5x}{\cos x+\cos 5x}=\tan 3x$ $b)\ \frac{\sin 3x+\sin 7x}{\cos 3x-\cos 7x}=\operatorname{cotan} 2x$

$c)\ \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=\tan y$; $d)\ \frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\tan 3x$

Exercice n°5 : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; **2)** $3-4\cos^2 2x=0$; **3)** $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; **5)** $\cos\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$pour\ x\epsilon[-2\pi;\ 2\pi\ ].$;

6) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin 3x=0$; **7)** $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin x$;

8) $\tan x=1$; **13)** $\tan x=-1$; **9)** $\tan x=\sqrt{3}$; $3\tan^2 x-1=0$

10) $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; **11)** $sin^2 2x-\sqrt{3}\,sin2x+\frac{3}{4}=0$

12) Vérifie que : $4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ puis résous

$-4\sin^2(x)+2(\sqrt{3}-1)cos(x)+4-\sqrt{3}=0$

Exercice n°6 :

1. Résous dans $\mathbb{R}$:

$\cos x+\sin x=-1$; $\cos x+\sin x-3=0$; $3\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{6}$.

$3cos\ 5x-4sin\ 5x=3$; $cos\ 2x-sin\ 2x-3=0$

2. Après avoir vérifié que : $sin(2x)=(sin\ x+cos\ x)^2-1$ résous les équations suivantes : $1-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x+\sin x=0$; $1+\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x+\sin x=0$

Exercice n°7 :

Soient $x\ et\ y$ deux nombres réels de l'intervalle $[0;\pi]$. On considère le système d'équation (S) :

$$\begin{cases}\cos x\times\cos y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}\\ \sin x\times\sin y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\end{cases}$$

1. Démontre que le système est équivalent à :

$$\begin{cases}\cos(x+y)=\frac{1}{2}\\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

2. Résoudre le système(S) dans $\mathbb{R}$.