

Exercice 1 : 1°) Dans chacun des cas suivants, déterminer la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est x :

$$a) x = 28\pi \quad ; \quad b) x = -69\pi \quad ; \quad c) x = -\frac{58\pi}{3} \quad ; \quad d) x = \frac{130\pi}{7}.$$

2°) Calculer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des nombres

$$\text{suivants : } -\frac{5\pi}{3} \quad ; \quad \frac{29\pi}{4} \quad ; \quad -\frac{121\pi}{6} \quad ; \quad \frac{15\pi}{2}.$$

Exercice 2 : 1°) Dans chacun des cas suivants, déterminer la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est x :

$$a) x = 39\pi \quad ; \quad b) x = -18\pi \quad ; \quad c) x = -\frac{29\pi}{4} \quad ; \quad d) x = \frac{121\pi}{6}.$$

2°) Calculer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des nombres

$$\text{suivants : } -\frac{97\pi}{3} \quad ; \quad \frac{9\pi}{2} \quad ; \quad -\frac{11\pi}{4} \quad ; \quad \frac{29\pi}{6}.$$

3°) Placer sur le cercle trigonométrique le point image de chacun des nombres réels

$$\text{suivants : } -\frac{16\pi}{3} \quad ; \quad \frac{11\pi}{2} \quad ; \quad -\frac{17\pi}{4} \quad ; \quad \frac{49\pi}{6}.$$

Exercice 3 : 1°) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \sin(4\pi - x) + \cos(8\pi + x)$$

$$B = \sin(\pi + x) + \cos(x - \pi) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 5\pi)$$

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$$

2°) Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$a) \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \quad ; \quad b) \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$c) (1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) \quad ; \quad d) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

Exercice 4 : 1°) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(-x) \quad ; \quad B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$$

2°) Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$a) \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \quad ; \quad b) \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$c) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \quad ; \quad d) \sqrt{1 + \sin 4x} = \sin 2x + \cos 2x.$$

Exercice 5 : 1°) Calculer $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $x \in \left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right[$.

2°) Calculer $\sin x$ et $\tan x$, sachant que : $\cos x = -\frac{2}{3}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$.

3°) Calculer $\cos x$ et $\sin x$, sachant que : $\tan x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Exercice 6 : 1°) A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle.

Démontrer que :

$$a) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2} \quad ; \quad b) \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

2°) On pose : $A = a \sin x \cos y$; $B = a \sin x \sin y$; $C = a \cos x$.

Démontrer que : $A^2 + B^2 + C^2 = a^2$.

3°) x et y sont deux éléments de $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ tel que : $\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Vérifier que : $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ et calculer $\cos x$.

b) Calculer $\sin y$ et en déduire la valeur de y.

c) Calculer $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$.

d) Calculer $\cos(x-y)$, $\sin(x-y)$ et en déduire la valeur de x.

Exercice 7 : 1°) Calculer $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$.

2°) Calculer $\cos x$; $\sin x$ et $\tan x$, sachant que : $\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5}$ et $x \in]0; \pi[$.

3°) Calculer $\sin x$; $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin(-x) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$.

4°) Calculer $\cos x$ et $\sin x$, sachant que : $\tan x = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$.

5°) Calculer $\cos 2x$ et en déduire la valeur de x, sachant que :

$$\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[.$$

Exercice 8 : 1°) Résoudre dans IR les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique, les images des solutions.

$$a) 2\cos 3x = 1 \quad ; \quad b) \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad c) \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad d) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2°) Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$a) \sin\left(5x - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad ; \quad b) \cos 5x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$c) 3\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} \quad ; \quad d) \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = -\sqrt{2}.$$

3°) Résoudre dans D les équations suivantes :

$$a) 2\sin^2 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 0 \quad \text{et} \quad D = [-\pi; \pi]$$

$$b) 2\cos^2 x - (2 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{et} \quad D = \mathbb{R}.$$

Exercice 9 :

$$1^\circ) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R}^2, \text{ le système suivant : } (S) : \begin{cases} \sin x - \sin y = 0 \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

2°) a) Transformer en une somme $\cos x \cdot \cos y$.

$$a) \text{ Résoudre dans } [0; 2\pi]^2 \text{ le système suivant : } \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

$$\textbf{Exercice 10 :} \text{ On considère le système d'équations : } (S) : \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}.$$

$$1^\circ) \text{ Démontrer que le système (S) est équivalent au système (S') : } \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

2°) Résoudre (S).

Exercice 11: On considère la fonction f de $[-\pi; \pi]$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}.$$

1°) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$, l'équation : $(1 + 2\cos 2x)\cos 3x = 0$.

2°) Démontrer que : $\cos x + \cos 5x = 2\cos 3x \cos 2x$.

3°) Déterminer l'ensemble de définition de f .

4°) Démontrer que : $\forall x \in Df ; f(x) = \tan 3x$.

Exercice 12: 1°) x étant un nombre réel, démontrer que :

$$\cos 5x = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5) \quad \text{et} \quad (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x.$$

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 5x = 1$.

b) Dédire des questions précédentes les valeurs exactes de

$$\cos \frac{2\pi}{5} \quad ; \quad \cos \frac{4\pi}{5} \quad \text{et} \quad \cos \frac{\pi}{5}.$$

Exercice 13 : Démontrer que, pour tous nombres réels a et b , on a :

$$a) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad b) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \quad c) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Exercice 14 : 1°) a) Ecrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

b) En déduire que : $\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$.

2°) a) Calculer :

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \quad \text{et} \quad B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}.$$

b) En déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

3°) On pose :

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}.$$

Calculer $A + B$ et $A - B$. En déduire A et B .

Exercice 15 : 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique, les images des solutions

a) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $2 \sin 3x = 1$; c) $\tan x = -\sqrt{3}$; d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

c) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$; d) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0$; e) $\cos 2x - \sin 2x = -1$

3°) Résoudre dans $\mathbb{D}$ les équations suivantes :

a) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$ et $D = \mathbb{R}$

b) $\sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3}{4} = 0$ et $D = \mathbb{R}$

c) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$ et $D = [-\pi ; \pi]$.

Exercice 16 : On pose : $A(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$.

1°) Factoriser $A(x)$.

2°) Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation : $A(x) = 0$.

3°) On considère la fonction f de $[0 ; 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Simplifier l'écriture $f(x)$.

Exercice 17 : 1°) En remarquant que $\sin 5x = \sin(4x + x)$, démontrer que :

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 5x = 0$; vérifier que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$.

4°) En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 18 : 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) 2\cos 2x + 1 < 0 \quad ; \quad b) -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} \leq 0 \quad ; \quad c) 3\tan 3x \geq -\sqrt{3}.$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{D}$ les systèmes d'inéquations suivants :

$$a) \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad D = [-\pi; \pi] \quad ; \quad b) \begin{cases} \sin 2x \geq \frac{1}{2} \\ \cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad D = \mathbb{R}.$$

Exercice 19 : 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) -2\cos 4x - \sqrt{2} \geq 0 \quad ; \quad b) 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 0 \quad ; \quad c) \tan 2x + 1 \geq 0.$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{D}$ les systèmes d'inéquations suivants :

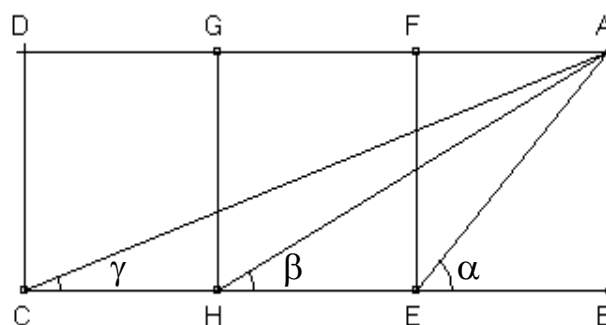
$$a) \begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad D = [0; 2\pi] \quad ; \quad b) \begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad D = \mathbb{R}$$

Exercice 21 :

On considère trois carrés de côté x disposés comme l'indique la figure ci - contre.

1°) Calculer en fonction de x les longueurs AE ; AH et AC .

2°) Calculer $\cos(\beta + \gamma)$ et en déduire que $\alpha = \beta + \gamma$.



Exercice 22 : 1°) Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est périodique de période T .

$$a) f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad b) f(x) = \cos(-6x + \pi) \quad \text{et} \quad T = \frac{\pi}{3}$$

$$c) f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad T = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad d) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad T = \pi.$$