

TRIGONOMETRIE

Exercice 1 : Mesure d'un angle

- Pour chacun des angles ci-dessous, déterminer la mesure principale et construire si possible le point image.
 - $a = \frac{145\pi}{4}$; $b = -\frac{736\pi}{6}$; $c = \frac{18\pi}{5}$
 - $a = 456^\circ$; $b = -418^\circ$; $c = 912^\circ$
 - $a = 445gr$; $b = 660 gr$; $c = -443gr$
- Trouver la mesure de l'angle φ dans les cas suivants :

- $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \cos \varphi = -1 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{1}{2} \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = 1 \end{cases} ; \begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = -1 \end{cases} ; \begin{cases} \cos \varphi = 1 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases}$

Exercice 2 : Angles associés

- Simplifier les écritures suivantes :

$$A = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin(\pi - t) - \sin(-t)$$

$$B = \sin x - \frac{1}{2} \sin(\pi + x) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$C = 2 \cos y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos(2\pi - y) - 3 \sin(-\pi + y)$$

$$D = \tan(\pi - u) - 3 \tan(u - \pi) + 2 \cotan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$E = \sin(x - y) \cos(x + y) - \sin(x + y) \cos(x - y)$$

$$F = \cos(2\pi - x) + \cos(-x) + \tan(\pi + x) - \cotan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

- Démontrer :
 - $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \cos x \sin x$
 - $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \cos x \sin x$
 - $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
 - $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x$
 - $(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x$
 - $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
 - $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x ; x \neq \pm \frac{\pi}{2}$
 - $4 \cos^4 x + 4 \sin^4 x = 3 + \cos 4x$
 - $\sin(x + y) \cdot \cos(x - y) = \sin x \cos x + \cos y \sin y$
 - $\frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan y$

Exercice 3 :

- Factoriser les expressions suivantes :
 - $\cos x + \cos 5x$;
 - $\sin 3x + \sin 7x$
 - $\cos 3x - \cos 7x$
- En déduire que :
 - $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$
 - $\frac{\sin 3x + \sin 7x}{\cos 3x - \cos 7x} = \cotan 2x$
 - $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

Exercice 4 : Formules de transformation

- En remarquant que : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et que : $\frac{7\pi}{12}$ est aigu, calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\tan \frac{7\pi}{12}$.
En remarquant que $\frac{7\pi}{6} = 2 \times \frac{7\pi}{12}$; calculer $\cos \frac{7\pi}{6}$; $\sin \frac{7\pi}{6}$ et $\tan \frac{7\pi}{6}$.
- En remarquant que : $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$ et que : $\frac{\pi}{12} \in [0; \frac{\pi}{2}]$; calculer $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.
- En remarquant que : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ et que : $\frac{\pi}{8} \in [0; \frac{\pi}{2}]$; calculer $\cos \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.
- Calculer :

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$
 En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$$
- On donne :

$$E = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$F = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$
 - Calculer $E + F$ et $E - F$.
 - En déduire les valeurs de E et F .
- Linéariser les expressions suivantes :
 - $\cos^4 x$; $\cos^5 x$; $\cos^7 3x$; $\cos^8 \frac{x}{2}$
 - $\sin^4 x$; $\sin^6 x$; $\sin^5 2x$
 - $\sin^2 x \cos^4 x$; $\cos^5 x \times \sin^3 x$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R} ;]-\pi; \pi[$ et $[0; \pi[$ les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{1}{2} ; 2 \cos 2x = -\sqrt{2} ;$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; 2 \sin 5x - \sqrt{2} = 0$$

$$\tan x = -1 ; \tan \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \tan x$$

$$-2 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} = 0 ; \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos 3x = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) ; \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x ; \sin 7x + \sin x = 3 \sin 4x$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$$

Exercice 6 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$;

b) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$;

c) $\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{6} \sin 2x = -\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x = \sqrt{6}$

e) $-\cos x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{2} = 0$

f) $\tan x = \sqrt{3}$; $\tan 2x = -1$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (si possible utiliser un changement de variable)

a) $4 \cos^2 x + 3 \sin^2 2x = 0$

b) $2 \cos 2x + 4 \cos x - 1 = 0$

c) $\cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$

d) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} = 0$

e) $2 \sin^2 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 0$

f) $2 \sin x \tan x - \tan x = 1 - 2 \sin x$

3. Résoudre dans $[0; \pi]^2$, le système :

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

4. Résoudre dans $[0; 2\pi] \times [0; \pi]$:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} ; \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

5. On donne le polynôme f définie par :

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$$

a) Déterminer un zéro évident de f puis factoriser f

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

c) Résoudre dans $] -\pi; \pi[$ l'équation :

$$2 \cos^3 x - 7 \cos^2 x + 2 \cos x + 3 = 0$$

Exercice 7 : Trouver les valeurs approchées des solutions dans $] -\pi; \pi[$ de chacune des équations suivantes :

a) $\cos x = 0,3$; $\cos x = -0,5$

b) $\sin x = 0,8$; $\sin x = -0,4$

c) $\tan x = 7$; $\tan x = -0,7$

Exercice 8 :

Soit le polynôme P définie par :

$$P(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

1. Calculer $P(1)$ et en déduire une factorisation de P

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$

3. Soit l'équation

$$(E): 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 1 = 0$$

a) Résoudre l'équation (E)

b) Placer les points images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique

4. Reprendre la question 3, pour l'équation :

$$(E'): 4 \sin^2 x - 3 \sin x - 1 = 0$$

Exercice 9 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R},] -\pi; \pi]$ et $[0; 2\pi[$ puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos x > \frac{1}{2}$; $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x > \frac{1}{2}$

c) $\cos 2x < \frac{1}{2}$; $\sin 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Résoudre dans $[0; \pi]$ les inéquations suivantes :

a) $(2 \cos x - 1)(\sin x - 1) < 0$

b) $(\sqrt{6} - \sqrt{2} \sin x) \cos x \geq 0$

c) $(\sin x - 5)(2 \cos x - \sqrt{3}) \leq 0$

d) $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \sin x + \sqrt{2} > 0$

Exercice 10 : Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $\cos^8 x = \sin^8 x$

En utilisant les formules de linéarisation ou

duplication, démontrer les égalités suivantes :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$$

b. En déduire que :

$$4 \cos^4 x + 4 \sin^4 x = 3 + \cos 4x$$

c. Prouve que :

$$4(\cos^8 x - \sin^8 x) = 3 \cos 2x + \cos 2x \cos 4x$$

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$4 \cos^8 x - 4 \sin^8 x = 0$$

E-mail : touresamba490@gmail.com

Tel : +223 83 61 64 70

Tel : +223 63 81 51 95